

LES TRAVAUX DE LAGUERRE SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES ET L'INFLUENCE HERMITIENNE

Yannick Vincent

Résumé. — Il existe un certain nombre de points communs entre Edmond Laguerre et Charles Hermite, deux mathématiciens français du XIX^e siècle, tant du point de vue de leurs parcours au sein des institutions mathématiques du XIX^e siècle que de leurs travaux. Ils se sont tous les deux intéressés au sujet des équations polynomiales et nous décrivons dans cet article le rôle qu'a pu jouer Hermite dans les travaux de Laguerre. Nous nous attachons ainsi à décrire l'ensemble des résultats publiés par Laguerre sur le sujet tout en pointant l'importance tant quantitative que qualitative de Hermite. Une dernière partie permettra de saisir les points communs et les similarités entre les approches de Hermite et de Laguerre. Plus généralement, il s'agira de montrer qu'ils ont des conceptions similaires tant sur la question de la généralité en mathématiques que sur les interactions entre algèbre et analyse par exemple.

Abstract. — Edmond Laguerre and Charles Hermite are both French mathematicians of the 19th century. They shared a common professional background in various institutions and the way they did mathematics. They were both interested in the subject of polynomial equations and we shall see in this article what role Hermite played in Laguerre's works. We describe how the results published by Laguerre emphasized the importance of Hermite. A last part deals with common points and similarities between the approaches of Laguerre and

Texte reçu le 5 octobre 2022, version révisée reçue le 13 juillet 2023, accepté le 19 septembre 2023.

Y. Vincent, Laboratoire LinX – École polytechnique.

Courrier électronique : yannickvincent@ecomail.fr

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A55, 01A85.

Mots clefs : Laguerre, Hermite, équations, polynômes, racines, approximations, history of algebra.

Key words and phrases. — Laguerre, Hermite, équations, polynômes, racines, approximations, histoire de l'algèbre.

Hermite. More globally, we show that they had comparable conceptions of various issues: about the question of generality in mathematics and about interactions between calculus and algebra.

INTRODUCTION

Pour bon nombre de mathématiciennes et de mathématiciens aujourd'hui, un des éléments rapprochant Charles Hermite d'Edmond Laguerre est sans doute qu'ils ont tous les deux donné leur nom à une famille de polynômes. Ceux de Hermite vérifient l'équation différentielle $y'' - xy' + ny = 0$ tandis que ceux de Laguerre vérifient l'équation différentielle $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$. Ils ont en fait bien d'autres points communs. Tous deux ont intégré l'École polytechnique, en tant qu'élèves, à seulement un peu plus d'une dizaine d'années d'intervalle¹. Hermite y a été répétiteur de 1848 à 1853 puis professeur de 1869 à 1876 et Laguerre y a été répétiteur de 1864 à 1886. Nous savons qu'il pouvait arriver à Laguerre de remplacer Hermite à l'amphithéâtre en cas d'absence² et qu'Hermite reprenait des démonstrations de Laguerre dans son propre cours³. Ils se rencontraient aussi dans le cadre de la Société mathématique de France dont ils étaient tous les deux membres [Hermite & Mittag-Leffler 1984, p. 141].

Tous les deux étaient également reconnus par le monde académique de leur temps en devenant, par exemple, membres de l'Académie des Sciences dans la section Géométrie. Hermite est ainsi entré à l'Académie des Sciences en 1856 à l'âge de 34 ans, rejoint plus tard par Laguerre en 1885 à l'âge de 51 ans. Entre 1856 et 1885, un grand nombre de notes publiées par Laguerre dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* ont été présentées en séance par Hermite⁴. Hermite a d'ailleurs soutenu la

¹ Hermite fait partie de la promotion 1842 et Laguerre de la promotion 1853 de l'École polytechnique.

² Poincaré explique par exemple dans une lettre envoyée à sa mère : « Une fois Hermite était malade et Laguerre nous faisant l'amphi nous fit une certaine question. Mais comme il écrit très mal à la planche, je n'avais pu prendre de notes ». [Rollet 2017, p. 84].

³ Plus précisément, Stieltjes écrit à Hermite dans une lettre datée du 2 juillet 1889 : « il semble qu'il doit être plus facile d'obtenir les théorèmes de Fuchs que les développements en séries, c'est aussi ce qui résulte des démonstrations de Laguerre et de Goursat que vous donnez dans votre Cours » [Hermite & Stieltjes 1898, p. 292].

⁴ Chaque note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* devait être présentée par un membre de l'Académie des Sciences. S'il n'était pas nécessaire de connaître un académicien pour publier, la proximité entre Hermite et Laguerre peut

candidature de Laguerre à l'Académie. Il indique par exemple dans une lettre à Gosta Mittag-Leffler datée de 1881 avoir « l'intention de proposer à la section de Géométrie de mettre en seconde ligne et seul [derrière Darboux], Mr Laguerre qui a beaucoup grandi depuis quelques temps par les recherches algébriques » [Hermite & Mittag-Leffler 1984, p. 110].

Cette même correspondance témoigne de la proximité personnelle entre les deux mathématiciens, lorsqu'Hermite écrit qu'il est « en [rapports d'amitié] avec Mr Laguerre qui est un excellent homme, et aussi un géomètre du plus rare mérite » [Hermite & Mittag-Leffler 1985, p. 105] puis que « la mort de Mr Laguerre, avec qui [il] était lié affectueusement depuis longtemps [le] prive malheureusement d'un appui important » [Hermite & Mittag-Leffler 1985, p. 128]. Quelques années plus tard, Hermite sera d'ailleurs l'un des éditeurs des *Œuvres* de Laguerre. Réciproquement, Eugène Rouché, camarade de Laguerre à l'École polytechnique, note que Laguerre « professait une si légitime admiration » pour Hermite [Rouché 1887, p. 148].

À la lecture des *Œuvres* de Laguerre, outre le fait qu'Hermite est l'un des éditeurs, on constate que le nom de Hermite apparaît très souvent. Nous reviendrons sur le fait que c'est même le nom le plus cité par Laguerre dans ses travaux. Cela traduit là aussi une certaine proximité, Laguerre faisant par exemple mention de discussions avec Hermite. Dans [Laguerre 1882a], il écrit par exemple :

M. Hermite m'a dit tenir de M. Genocchi que la méthode généralement attribuée à Plana appartient en réalité à F. Chio. [Laguerre 1882a, p. 161]

De même, dans [Laguerre 1882b], Laguerre écrit :

Je tiens de M. Hermite, à qui j'avais communiqué ces résultats, qu'il les avait obtenu de son côté et par la même voie. [Laguerre 1882b, p. 636]

Ces quelques éléments illustrent non seulement la présence de Hermite dans les travaux de Laguerre par le biais de citations mais également la collaboration et les échanges directs entre les deux mathématiciens.

On peut toutefois se demander pourquoi Laguerre cite autant Hermite alors que leurs travaux portent globalement sur des domaines assez différents. Laguerre a en effet publié majoritairement des articles en Géométrie tandis que ce sujet n'est que peu traité par Hermite. Inversement, Hermite s'est davantage intéressé à la théorie des nombres, sujet fort peu exploré

toutefois expliquer que le nom de Hermite revienne souvent parmi ceux qui présentent les notes de Laguerre avant sa propre élection [Crosland 1992, p. 288-293].

par Laguerre. En fait, dans les travaux de Laguerre, les références à Hermite sont surtout importantes à propos d'un sujet spécifique, celui des équations polynomiales⁵. Cela n'est d'ailleurs pas étranger au fait qu'ils ont fréquenté le même cadre scolaire. La résolution pratique des équations et l'approximation des racines avaient en effet une place importante dans la formation mathématique de l'École polytechnique et des classes préparatoires. On peut notamment citer les théorèmes de Hermite et de Laguerre qui portent sur les équations numériques, c'est-à-dire sur les équations résolues de manière approchée. Laguerre s'est beaucoup intéressé à ce sujet à partir des années 1870 lorsqu'il est devenu répétiteur à l'École polytechnique et examinateur du concours d'admission. De son côté, Hermite a su trouver et démontrer un résultat concernant les racines des équations dont les coefficients forment une progression arithmétique. Il l'a fait alors qu'il était encore élève en classes préparatoires. Nous aurons l'occasion d'y revenir lorsque nous aborderons la question des points communs entre les deux mathématiciens mais il est clair que la thématique des équations polynomiales est un sujet qui a intéressé tant Hermite que Laguerre. Notre objectif sera alors de comprendre pourquoi Laguerre fait autant de références à Hermite sur ce sujet. Il s'agira, d'une part, de présenter les différents articles de Laguerre au sujet des équations et, d'autre part, de capter l'influence et l'importance de Hermite sur ces travaux.

Les deux premières parties de notre article sont essentiellement factuelles. La première présente un panorama général des travaux de Laguerre et revient sur l'importance quantitative de Hermite dans ces travaux. La seconde partie apporte des détails sur les résultats dûs à Laguerre au sujet des équations numériques et explicite l'objet des références à Hermite. La dernière partie vise enfin à présenter les points de convergence entre les deux mathématiciens, tant dans leurs objets d'étude que dans leur conception des mathématiques. L'exemple des équations numériques permettra notamment d'illustrer cette convergence de point de vue.

1. PANORAMA GÉNÉRAL DES TRAVAUX DE LAGUERRE ET DE L'INFLUENCE HERMITIENNE

1.1. *Les mathématiques de Laguerre*

Publiées en 1898 par Charles Hermite, Henri Poincaré et Eugène Rouché, les *Œuvres* de Laguerre contiennent 148 articles, classés en trois

⁵ Les deux mathématiciens ont aussi tous les deux travaillé sur les fonctions elliptiques et Laguerre a régulièrement cité Hermite à ce sujet (les articles de Laguerre sur la questions sont classés dans la rubrique Calcul intégral de ses *Œuvres*). Nous n'aborderons néanmoins pas cette thématique ici.

parties : 45 dans la rubrique « Algèbre », 21 dans celle de « Calcul intégral » et 82 en « Géométrie ». À cela, nous pouvons aussi ajouter un article de Charles Hermite intitulé « Sur un mémoire de Laguerre concernant les équations algébriques » et inséré à la fin du premier volume des *Œuvres*. Cette présence de Hermite dans les *Œuvres* de Laguerre renforce encore un peu plus l'impression de proximité évoquée en introduction. Cela signifie en outre que si Laguerre a été influencé par les mathématiques de Hermite, ce dernier s'est, réciproquement, intéressé aux travaux du premier. Deux articles de Laguerre sont d'ailleurs cités à plusieurs reprises par Hermite, à savoir [Laguerre 1877] et [Laguerre 1880b], en particulier au moment de l'édition des *Œuvres*.

Dans le cadre de cet article, et sauf mention explicite du contraire, les termes Algèbre, Calcul intégral et Géométrie désigneront les trois parties des *Œuvres*. Les travaux de Laguerre en Géométrie ont globalement précédé ceux d'Algèbre et de Calcul intégral⁶. Après avoir rédigé quelques articles alors qu'il était encore élève (ces articles portent sur la théorie des foyers), Laguerre a recommencé à publier en 1865. Entre temps, de 1853 à 1864, il s'est écoulé une décennie où, engagé dans l'armée, il ne publie aucun texte mathématique. En 1864, il obtint alors un poste de répétiteur de Géométrie descriptive à l'École polytechnique, moment qui correspond à une reprise de ses publications. Dans un premier temps, jusqu'en 1874, ses articles sont en fait très majoritairement classés en Géométrie et ne seront donc que peu utiles dans le cadre de notre étude sur les équations polynomiales⁷. À partir de 1874, Laguerre s'est en revanche d'avantage intéressé à des sujets d'Algèbre et de Calcul intégral tout en continuant à publier des articles de Géométrie pendant quelques années. C'est ainsi qu'en 1874, il a publié son premier article sur les équations numériques dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* : « Sur une formule nouvelle permettant d'obtenir, par approximations successives, les racines d'une équation dont toutes les racines sont réelles ».

À partir de là, Laguerre a publié régulièrement des articles dont le titre comporte les mots « équations numériques », ce sujet constituant alors une sorte de fil rouge dans ses travaux. Autour de ce fil rouge, il est de plus possible de distinguer des périodes de trois ou quatre années durant lesquelles Laguerre s'est consacré à un sujet plus particulier. Par exemple, à la fin des années 1870, entre 1877 et 1880, il a publié plusieurs articles

⁶ Pour plus d'informations concernant les travaux de Laguerre, voir [Vincent 2019].

⁷ De 1852 à 1875, 51 articles sur 62 ont été classés dans la rubrique Géométrie des *Œuvres*.