

336

ASTÉRISQUE

2011

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS
IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya & Laurent Saloff-Coste

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 336, 2011

Comité de rédaction

Guy DAVID	Fabrice PLANCHON
Olivier DEBARRE	Raphaël ROUQUIER
Damien GABORIAU	Wolfgang SOERGER
Patrice LE CALVEZ	Wendelin WERNER
Robert Alain OLIVER	
Yves ANDRÉ (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 30 € (\$45)
Abonnement Europe : 463 €, hors Europe : 512 € (\$768)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2011

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-306-5

Directeur de la publication : Aline BONAMI

336

ASTÉRISQUE

2011

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS
IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya & Laurent Saloff-Coste

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Pavel Gyrya

Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853
pavel.gyrya@cornell.edu

Laurent Saloff-Coste

Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853
lsc@math.cornell.edu

Classification mathématique par sujet (2000). — 31C256, 35K20, 58J35, 60J60; 31C12 58J65, 60J45.

Mots-clés. — Noyau de chaleur, condition aux limites de Dirichlet, domaines intérieurs uniformes, espaces de Dirichlet, inégalités de Harnack.

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya, Laurent Saloff-Coste

Abstract. — This monograph focuses on the heat equation with either the Neumann or the Dirichlet boundary condition in unbounded domains in Euclidean space, Riemannian manifolds, and in the more general context of certain regular local Dirichlet spaces. In works by A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste and K-T. Sturm, the equivalence between

- the parabolic Harnack inequality,
- the two-sided Gaussian heat kernel estimate,
- the Poincaré inequality and the volume doubling property,

is established in a very general context. We use this result to provide precise two-sided heat kernel estimates in a large class of domains described in terms of their inner intrinsic metric and called inner (or intrinsically) uniform domains. Perhaps surprisingly, we treat both the Neumann boundary condition and the Dirichlet boundary condition using essentially the same approach albeit with the additional help of a Doob's h -transform in the case of Dirichlet boundary condition.

The main results are new even when applied to Euclidean domains with smooth boundary where they capture the global effect of the condition of inner uniformity as, for instance, in the case of domains that are the complement of a convex set in Euclidean space.

Résumé (Le noyau de la chaleur avec condition de Neumann ou de Dirichlet dans les domaines intérieurement uniformes). — Ce texte traite de l'étude du noyau de la chaleur avec condition de Neumann ou condition de Dirichlet au bord dans les domaines euclidiens non-bornés, mais aussi les domaines non-bornés dans les variétés riemanniennes et, plus généralement, les domaines non-bornés de certain espaces de Dirichlet réguliers locaux.

Les travaux de A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste et K-T. Sturm, ont montré l'équivalence, dans un large contexte, des propriétés suivantes:

- l'inégalité de Harnack parabolique,
- les estimations gaussiennes du noyau de la chaleur,

— l'inégalité de Poincaré et la propriété de doublement du volume.

Nous utilisons ce résultat pour obtenir des estimations précises du noyau de la chaleur pour une large classe de domaines définis en termes de leur distance intrinsèque et appelés domaines intérieurement (ou intrinséquement) uniformes. De façon peut être surprenante, nous traitons le problème avec la condition de Neumann au bord et celui avec la condition de Dirichlet au bord par la même approche, mais avec l'aide supplémentaire d'une transformation de Doob dans le cas de la condition de Dirichlet.

Les résultats principaux que nous obtenons sont nouveaux même dans le cas des domaines euclidiens à bord régulier où ils capturent l'effet de la condition d'uniformité intérieure comme, par exemple, dans le cas des domaines qui sont le complément d'un convexe fermé de \mathbb{R}^n .

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. Goals: informal description	1
1.2. Smooth unbounded Euclidean domains	3
Neumann boundary condition	3
Dirichlet boundary condition	4
1.3. Inner uniform domains	6
1.4. Remarks on the Doob h -transform technique	11
1.5. Harnack-type Dirichlet spaces	11
1.6. Inner uniform domains in Harnack-type Dirichlet spaces	13
1.7. Mixed boundary conditions	14
2. Harnack-type Dirichlet spaces	17
2.1. Model spaces	17
2.1.1. The n -dimensional Euclidean space	17
2.1.2. Uniformly elliptic divergence form operators	19
2.1.3. Riemannian manifolds	20
2.1.4. Sub-Riemannian geometry	20
2.1.5. Polytopal complexes	22
2.2. Local regular Dirichlet spaces	23
2.2.1. Regular Dirichlet forms	23
2.2.2. Energy and carré du champ	24
2.2.3. The intrinsic distance associated with a Dirichlet form	26
2.2.4. The doubling property	28
2.2.5. The Poincaré inequality	29
2.2.6. Lipschitz functions	30
2.2.7. The heat semigroup	31
2.2.8. Local weak solutions of the Laplace and heat equation	31
2.2.9. Local weak solutions of the Laplace equation	32
2.2.10. Local weak solutions of the heat equation	32
2.3. Harnack-type Dirichlet spaces	34
2.3.1. Parabolic Harnack inequality	34
2.3.2. Doubling, Poincaré, and Harnack inequality	36
2.3.3. The associated Hunt process and harmonic sheaf	38
2.4. Boundary conditions	39

2.4.1. The Dirichlet-type heat semigroup in U	39
2.4.2. Weak solutions with Dirichlet boundary condition along ∂U ...	42
2.4.3. The Neumann-type heat semigroup in U	45
2.4.4. Weak solutions with Neumann boundary condition along ∂U ...	46
3. The Neumann heat kernel in inner uniform domains	49
3.1. Inner uniform domains	49
3.1.1. Uniform domains	49
3.1.2. Inner uniform domains	53
3.1.3. Basic examples and related notions	55
3.2. The Neumann-type Dirichlet form in inner uniform domains	55
3.3. The Poincaré inequality in inner uniform domains	56
3.3.1. Statements of the main inequalities	57
3.3.2. Whitney covering	58
3.3.3. The trace of \mathfrak{R} on a fixed ball B in \widetilde{U}	60
3.3.4. Decomposition using Whitney balls	61
3.3.5. Poincaré inequality with a different measure	66
3.4. Applications to Neumann-type Dirichlet forms	67
3.4.1. Regularity of Neumann-type Dirichlet forms	67
3.4.2. Proof of the heat kernel estimates for the Neumann-type semigroups	71
4. The harmonic profile of an unbounded inner uniform domain ..	73
4.1. The harmonic profile	73
4.2. The elliptic boundary Harnack principle in uniform domains	74
4.2.1. Boundary Harnack principle	74
4.2.2. The boundary Harnack principle for the Green functions $G_{\xi,R}^U$..	76
4.2.3. Basic Green functions estimates	77
4.2.4. The work of Aikawa	80
4.2.5. Green functions and capacity width	80
4.3. Existence of a harmonic profile	89
4.3.1. A profile candidate	89
4.3.2. For uniform domains, the candidate h is indeed a profile	90
4.3.3. The doubling property of the profile	91
4.4. From uniform domains to inner uniform domains	93
5. The Dirichlet heat kernel in inner uniform domains	95
5.1. The h -transform technique	95
5.1.1. Dirichlet-type Dirichlet forms	95
5.1.2. The h -transform technique	96
5.2. The h^2 -weighted Dirichlet form	99
5.2.1. Regularity on \widetilde{U}	99
5.2.2. The h -transform on inner uniform domains	100
5.3. The Dirichlet-type Dirichlet form on an inner uniform domain	101

5.3.1. The Dirichlet heat kernel	101
5.3.2. The parabolic boundary Harnack principle	104
6. Examples	107
6.1. Limits in $\mathcal{F}^0(U)$	107
6.2. From classical solutions to weak solutions in Euclidean domains	108
6.3. The domain above the graph of a function	112
6.4. The complement of a convex set	117
6.4.1. The complement of a convex set is inner uniform	118
6.4.2. Exterior of a star-shaped domain.	120
6.5. Miscellaneous examples	126
6.5.1. The Von Koch snowflake	126
6.5.2. Cones	129
6.5.3. The Fibonacci spiral	130
6.6. Examples in sub-Riemannian geometry	131
6.6.1. The canonical sub-Riemannian geometry of the Heisenberg group	131
6.7. Examples in the context of Euclidean complexes	134
Bibliography	137

