367-368

ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉS 1074-1088

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)
Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

367-368

ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉS 1074-1088

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki.
École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.
URL : `http://www.bourbaki.ens.fr`

***Mots-clefs et classification mathématique par sujets* (2000)**

Exposé nº 1074. — Problèmes bien posés, séries aléatoires, équations des ondes — 35A05, 35L71, 37L50.
Exposé nº 1075. — Lemme de Margulis, courbure de Ricci presque positive — 53C20.
Exposé nº 1076. — Processus de saut, équation de Boltzmann, programme de Kac, différentiabilité en dimension infinie, simulation directe Monte Carlo — 35B35, 35Q20, 45K05, 60J75, 65C05, 82C22, 82C40, 82C80.
Exposé nº 1077. — Approximate groups — 11B30; 03C98, 20N99.
Exposé nº 1078. — Variétés de dimension 3, géométrie hyperbolique, complexes cubiques — 20F67 57Mxx.
Exposé nº 1079. — Homologie de Khovanov, homologie de Floer lagrangienne, homologie de Heegaard-Floer — 57M25, 57M27, 57R17.
Exposé nº 1080. — Géométrie conforme, surface minimale, conjecture de Willmore, méthode de min-max — 53C42, 49Q20.
Exposé nº 1081. — Surfaces K3, conjecture de Tate, courbes rationnelles, théorème de Torelli — 14J28, 14C25, 14C20, 14C34, 14G35.
Exposé nº 1082. — Spin glasses, ultrametricity, Parisi formula, Ghirlanda-Guerra identity — 82B44, 82B20, 60K35.
Exposé nº 1083. — Équation de Boltzmann, hiérarchie BBGKY, limite de Boltzmann-Grad, théorie cinétique, propagation du chaos, équation de Boltzmann linéaire, approximation par la diffusion — 35Q20, 82A70, 35Q70, 82B40, 82C22.
Exposé nº 1084. — Prime numbers, primes in arithmetic progressions, prime gaps, sieve methods, exponential sums, bilinear forms — 11N05, 11N13, 11N35, 11N37, 11L05, 11T23.
Exposé nº 1085. — Théorie des types, axiome d'univalence, ∞-groupoïdes — 03B15, 18A15.
Exposé nº 1086. — Preuve formelle — 03B15, 03B35, 68T15.
Exposé nº 1087. — Einstein equations, general relativity, quasilinear wave equations, low regularity, Cauchy problem — 83C05, 53C50, 53C80, 35L72.
Exposé nº 1088. — États purs sur les C^*-algèbres, polynômes réels stables, matrices aléatoires, polynômes caractéristiques mixtes, conjecture de Bourgain-Tzafriri, graphes de Ramanujan — 05C50, 15A15, 26C10, 46L30.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉS 1074-1088

Résumé. — Ce 66^{e} volume du Séminaire Bourbaki regroupe les textes des quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité effectués pendant l'année 2013/2014 : quatre exposés de topologie et géométrie différentielle, quatre exposés d'équations aux dérivées partielles, un exposé sur la structure des groupes approximatifs, un exposé d'analyse fonctionnelle, un exposé sur la géométrie algébrique des surfaces K3, un exposé sur les écarts entre nombres premiers, un exposé de probabilités et deux exposés sur les fondements des mathématiques et les preuves formelles.

***Abstract* (Séminaire Bourbaki, volume 2013/2014, exposés 1074–1088)**

This 66th volume of the Bourbaki Seminar contains the texts of the fifteen survey lectures done during the year 2013/2014: four lectures on topology and differential geometry, four lectures about partial differential equations, one lecture on the structure of approximate groups, one lecture about functional analysis, one lecture on the algebraic geometry of K3 surfaces, one lecture about the gaps between prime numbers, one lecture on probability theory and two lectures concerning foundations of mathematics and formal proofs.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2015

Anne de BOUARD — *Construction de solutions pour des EDP sur-critiques à données initiales aléatoires (d'après N. Burq et N. Tzvetkov)*

Certaines équations aux dérivées partielles admettent un exposant de régularité critique en dessous duquel le problème de Cauchy est réputé mal posé, grâce à un argument d'échelle introduit pour la première fois par Ginibre et Velo. Dans certains cas cette conjecture a été démontrée (notamment par Lebeau d'une part et Christ-Colliander-Tao d'autre part, pour l'équation des ondes non linéaire ou l'équation de Schrödinger non linéaire). Nous expliquerons comment N. Burq et N. Tzvetkov construisent néanmoins des solutions locales (ou globales dans certains cas) pour de telles équations, pour presque toutes données initiales choisies aléatoirement dans une classe de régularité inférieure à ce seuil de régularité critique.

Gilles COURTOIS — *Lemme de Margulis à courbure de Ricci minorée (d'après Vitali Kapovitch et Burkhard Wilking)*

Le lemme de Margulis affirme qu'il existe une constante strictement positive $\mu(n)$ telle que pour toute variété riemannienne (M, g) de dimension n et de courbure sectionnelle comprise entre -1 et 0, et tout point x de M, le sous-groupe du groupe fondamental de M en x engendré par les lacets de longueur inférieure à $\mu(n)$ contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini, majoré par une constante $C(n)$. La démonstration de ce lemme résulte, dans le cas homogène, d'une observation très simple sur les commutateurs de matrices et s'y ramène, dans le cas riemannien, en considérant l'holonomie le long des lacets. Le but de cet exposé est d'expliquer la démonstration, par V. Kapovitch et B. Wilking, du lemme de Margulis lorsque (M, g) appartient à l'ensemble $\mathscr{M}(n)$ des variétés riemanniennes de dimension n à courbure de Ricci minorée par -1. Sous cette seule hypothèse de borne inférieure sur la courbure de Ricci, la preuve est de nature profondément différente : elle repose sur des travaux de J. Cheeger et T. Colding concernant la structure des espaces métriques au bord de $\mathscr{M}(n)$.

Laurent DESVILLETTES — *Progrès récents concernant le programme de Kac en théorie cinétique (d'après Stéphane Mischler et Clément Mouhot)*

Le programme de Kac s'incrit dans le cadre général du 6$^{\text{e}}$ problème de Hilbert, qui vise à axiomatiser une partie de la physique mathématique, et en particulier la théorie cinétique des gaz. Il explique en quoi certaines équations non-linéaires de la physique macroscopique peuvent être vues comme des limites de systèmes avec un nombre fini de particules. Récemment, S. Mischler et C. Mouhot ont proposé de nouvelles estimations pour ce programme qui sont à la fois plus explicites que celles qui étaient précédemment connues et mieux compatibles avec les limites en temps grand.

Lou van den DRIES — *Approximate Groups (according to Hrushovski and Breuillard, Green, Tao)*

On appelle groupe K-approximatif toute partie X d'un groupe qui est symétrique, contient l'identité et est tel que XX peut être recouvert par au plus K translatés à gauche de X. Le résultat principal dit que tout groupe K-approximatif fini est, grossièrement, fini-par-nilpotent.

Nicolas BERGERON — *Toute variété de dimension* 3 *compacte et asphérique est virtuellement de Haken (d'après Ian Agol et Daniel T. Wise)*

La vieille conjecture — attribuée à Waldhausen et formulée en 1968 — dite « conjecture virtuellement Haken » était certainement la plus importante question ouverte concernant la topologie des variétés de dimension 3. Depuis la preuve de la conjecture de géométrisation par Grigori Perelman, elle ne restait plus à démontrer que pour les variétés hyperboliques.

C'est ce que vient de faire Ian Agol en s'appuyant sur un travail de fond développé par Dani Wise. Mais Agol démontre bien plus, il démontre une conjecture de Wise qui a de nombreux corollaires : le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non élémentaire, possède un sous-groupe d'indice fini qui est bi-ordonnable, s'injecte dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ pour un certain n, etc. Au point que Danny Calegari n'a pas hésité à écrire : « It is hard to think of a question about fundamental groups of hyperbolic 3-manifolds that it doesn't answer. » Agol déduit enfin de son théorème que toute variété hyperbolique compacte de dimension 3 possède un revêtement fini qui est homéomorphe à la suspension d'une surface compacte par un difféomorphisme. Partant de ces questions classiques de topologie de petite dimension, je formulerai la conjecture de Wise et tâcherai de donner les grandes lignes de la démonstration d'Agol. Tout cela sera émaillé de divers dessins (de cubes).

Vincent COLIN — *Réalisations géométriques de l'homologie de Khovanov par des homologies de Floer (d'après Abouzaid-Seidel-Smith et Ozsváth-Szabó)*

L'homologie de Khovanov est un invariant des entrelacs de S^3 défini à partir d'un diagramme planaire par de mystérieuses formules combinatoires. Ozsváth-Szabó (2005) et Seidel-Smith (2006) en fournissent des interprétations géométriques dans le cadre de l'homologie de Floer lagrangienne. L'équivalence annoncée récemment par Abouzaid et Smith entre l'homologie de Khovanov et son pendant symplectique devrait permettre de mieux cerner les applications potentielles de l'invariant initial.

Tristan RIVIÈRE — *Méthodes de min-max et la conjecture de Willmore (d'après F.C. Marques et A.A. Neves)*

Il y a bientôt deux ans F.C. Marques et A. Neves ont mis en œuvre dans le cadre des courants rectifiables fermés de dimension 2 dans la sphère 3-dimensionnelle une méthode de min-max en théorie de la mesure géométrique due à F. Almgren et J. Pitts. Ils sont ainsi parvenus à démontrer que le fameux « tore de Clifford » minimise l'aire parmi toutes les surfaces minimales de genre non nul dans la sphère tridimensionnelle. Une des conséquences spectaculaires de ce résultat est la démonstration de la conjecture dite « de Willmore ».

Le but de cet exposé sera de rendre compte du cadre général du résultat de Marques et Neves, de la structure et de certains détails clés de la preuve, ainsi que de la portée de cette contribution remarquable au calcul des variations des surfaces en dimension 3.

Olivier BENOIST — *Construction de courbes sur les surfaces K3 (d'après Bogomolov-Hassett-Tschinkel, Charles, Li-Liedtke, Madapusi Pera, Maulik...)*

La conjecture de Tate prédit l'existence de courbes sur les surfaces algébriques définies sur un corps fini. On présentera des travaux récents de Maulik, Charles et Madapusi Pera, qui ont permis d'achever la démonstration de cette conjecture dans le cas des surfaces K3 (en caractéristique différente de 2). On expliquera également des applications de la conjecture de Tate à la construction de courbes rationnelles sur les surfaces K3, dues à Bogomolov-Hassett-Tschinkel et Li-Liedtke

Erwin BOLTHAUSEN — *Ultrametricity in mean-field spin glasses (after Dmitry Panchenko)*

Ultrametricity lies at the core of the Parisi theory of spin glasses, particularly for the Sherrington-Kirkpatrick model. In a vague sense, it claims that the Gibbs measure is hierarchically organized. This picture was crucial for the original derivation by Parisi of the free energy using the non-rigorous replica method, and also in the later developed cavity method by Mézard and Parisi. However, the first rigorous proof by Talagrand of the Parisi formula