457

ASTÉRISQUE

2025

STRUCTURE OF CONJUGACY CLASSES IN COXETER GROUPS

T. Marquis

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 457, 2025

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
`commandes@smf.emath.fr`	`http://www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 46 € ($ 69)

Abonnement Europe : 818 €, hors Europe : 889 € ($ 1 333)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
`asterisque@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-37905-201-9
doi:10.24033/ast.1246

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

457

ASTÉRISQUE

2025

STRUCTURE OF CONJUGACY CLASSES IN COXETER GROUPS

T. Marquis

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Timothée Marquis
UCLouvain, IRMP-MATH, Chemin du Cyclotron 2, Bte L7.01.02, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgium
`timothee.marquis@uclouvain.be`

Soumis le 14 mai 2021, accepté le 31 août 2023.

Mathematical Subject Classification (2010). **–** 20F55, 20E45.
***Keywords*. –** Coxeter groups, conjugacy classes, cyclic shifts.
***Mots-clefs*. –** Groupes de Coxeter, classes de conjugaison, permutations cycliques.

STRUCTURE OF CONJUGACY CLASSES IN COXETER GROUPS

by

T. Marquis

Abstract. – This paper gives a definitive solution to the problem of describing conjugacy classes in arbitrary Coxeter groups in terms of cyclic shifts.

Let (W, S) be a Coxeter system. A *cyclic shift* of an element $w \in W$ is a conjugate of w of the form sws for some simple reflection $s \in S$ such that $\ell_S(sws) \leq \ell_S(w)$. The *cyclic shift class* of w is then the set of elements of W that can be obtained from w by a sequence of cyclic shifts. Given a subset $K \subseteq S$ such that $W_K := \langle K \rangle \subseteq W$ is finite, we also call two elements $w, w' \in W$ *K-conjugate* if w, w' normalize W_K and $w' = w_0(K) w w_0(K)$, where $w_0(K)$ is the longest element of W_K.

Let $\mathcal{O}$ be a conjugacy class in W, and let $\mathcal{O}^{\min}$ be the set of elements of minimal length in $\mathcal{O}$. Then $\mathcal{O}^{\min}$ is the disjoint union of finitely many cyclic shift classes $C_1, \dots, C_k$. We define the *structural conjugation graph* associated to $\mathcal{O}$ to be the graph with vertices $C_1, \dots, C_k$, and with an edge between distinct vertices C_i, C_j if they contain representatives $u \in C_i$ and $v \in C_j$ such that u, v are K-conjugate for some $K \subseteq S$.

In this paper, we compute explicitely the structural conjugation graph associated to any (possibly twisted) conjugacy class in W, and show in particular that it is connected (that is, any two conjugate elements of W differ only by a sequence of cyclic shifts and K-conjugations). Along the way, we obtain several results of independent interest, such as a description of the centralizer of an infinite order element $w \in W$, as well as the existence of natural decompositions of w as a product of a "torsion part" and of a "straight part", with useful properties.

***Résumé* (Structure des classes de conjugaison dans les groupes de Coxeter).** – Cet article fournit une solution définitive au problème de la description des classes de conjugaison dans les groupes de Coxeter arbitraires en termes de permutations cycliques.

Soit (W, S) un système de Coxeter. Une *permutation cyclique* d'un élément $w \in W$ est un conjugué de w de la forme sws pour une réflexion simple $s \in S$ telle que $\ell_S(sws) \leq \ell_S(w)$. La *classe de permutation cyclique* de w est alors l'ensemble des éléments de W qui peuvent être obtenus à partir de w par une suite de permutations cycliques. Étant donné un sous-ensemble $K \subseteq S$ tel que $W_K := \langle K \rangle \subseteq W$ est fini,

on appelle aussi deux éléments $w, w' \in W$ K*-conjugués* si w, w' normalisent W_K et $w' = w_0(K) w w_0(K)$, où $w_0(K)$ est l'élement le plus long de W_K.

Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison dans W, et soit $\mathcal{O}^{\min}$ l'ensemble des éléments de longueur minimale dans $\mathcal{O}$. Alors $\mathcal{O}^{\min}$ est la réunion disjointe d'un nombre fini de classes de permutation cyclique $C_1, \dots, C_k$. On définit le *graphe de conjugaison structurel* associé à $\mathcal{O}$ comme étant le graphe de sommets $C_1, \dots, C_k$, et avec une arête entre les sommets distincts C_i, C_j s'ils contiennent des représentants $u \in C_i$ et $v \in C_j$ tels que u, v sont K-conjugués pour un certain $K \subseteq S$.

Dans cet article, nous calculons explicitement le graphe de conjugaison structurel associé à toute classe de conjugaison (éventuellement tordue) dans W, et montrons en particulier qu'il est connexe (autrement dit, deux éléments conjugués de W ne diffèrent que par une suite de permutations cycliques et de K-conjugaisons). Chemin faisant, nous obtenons plusieurs résultats d'intérêt indépendant, comme une description du centralisateur d'un élément d'ordre infini $w \in W$, ainsi que l'existence de décompositions naturelles de w comme produit d'une "partie de torsion" et d'une "partie rectiligne", avec des propriétés utiles.

CONTENTS