

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CRISTAUX ET IMMEUBLES

Christophe Cornut & Marc-Hubert Nicole

Tome 144
Fascicule 1

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 125-143

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 144, janvier 2016

Comité de rédaction

Valérie BERTHÉ	Marc HERZLICH
Gérard BESSON	O'Grady KIERAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Yann BUGAUD	Emmanuel RUSS
Jean-François DAT	Christophe SABOT
Charles FAVRE	Wilhelm SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € (\$ 291)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

CRISTAUX ET IMMEUBLES

PAR CHRISTOPHE CORNUT & MARC-HUBERT NICOLE

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}_p$. L'ensemble des cristaux contenus dans un G -isocristal donné est envisagé d'un point de vue immobilier comme un voisinage tubulaire d'un squelette caractérisé par une propriété de minimalité de nature métrique. Nous prouvons l'inégalité de Mazur en guise d'illustration.

ABSTRACT (*Crystals and buildings*). — Let G be a connected reductive group defined over $\mathbb{Q}_p$. The set of crystals contained in a given G -isocrystal is viewed from a Bruhat-Tits building-theoretic vantage point as a kind of tubular neighborhood of a skeleton characterized by a minimality property arising from metric space theory. To illustrate this approach, we prove the Mazur inequality.

1. Introduction

La catégorie des isocristaux sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ est semisimple, et ses objets simples sont classifiés par leur pente $\lambda \in \mathbb{Q}$. Ce travail propose un point de vue immobilier systématique sur l'ensemble des cristaux contenus dans un isocristal fixé muni de structures supplémentaires. De tels ensembles interviennent notamment dans la description

Texte reçu le 31 octobre 2014, révisé et accepté le 13 mai 2015.

CHRISTOPHE CORNUT
MARC-HUBERT NICOLE

Classification mathématique par sujets (2000). — 20E42, 20G25, 14L05.

Mots clefs. — G -isocrystals, Bruhat-Tits building, reductive groups, Mazur's inequality.

C.C. a bénéficié du soutien du contrat ANR-10-BLAN-0114 ArShiFo.

conjecturale des fibres spéciales des variétés de Shimura, voir [10]. La pertinence et le caractère structurant du point de vue immobilier apparaissent aussi dans les travaux récents de Vollaard et Wedhorn sur les cristaux supersinguliers pour les variétés de groupe $\mathrm{GU}(n, 1)$, voir [22] et ses références.

Dans la classification de Manin des F -cristaux à isomorphisme près, certains cristaux dits spéciaux jouent un rôle de pivot. Dans chaque classe d'isogénie, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de tels cristaux, mais ce nombre est généralement supérieur à un. Parmi ceux-ci, Oort a identifié dans [12] des cristaux qui sont uniquement déterminés par leur troncature à l'échelon 1 : les cristaux minimaux. Ils sont caractérisés par cette propriété de rigidité et forment une unique classe d'isomorphisme, ce qui les désigne comme un candidat plus naturel autour duquel amorcer la classification.

Dans le cadre du formalisme des G -isocristaux de Kottwitz et Rapoport-Richartz, nous proposons de placer au cœur de la description des ensembles de cristaux ci-dessus un lieu remarquable qui en constitue le squelette. Ce lieu est caractérisé par une propriété de minimalité que l'on emprunte à la théorie des espaces métriques à courbure négative, mais qui nous fut inspirée par la notion homonyme de Oort.

L'ensemble des cristaux contenus dans un G -isocristal fixé est donc vu ici comme une sorte de voisinage tubulaire du squelette. Notre résultat principal identifie ce dernier à l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe des automorphismes du G -isocristal. Nous en déduisons une nouvelle preuve très naturelle de l'inégalité de Mazur, cf. [16, §4.4] et [8, Thm 4.2].

2. Immeubles

2.1. — Soit K un corps complet pour une valuation $\omega : K^\times \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on suppose discrète et non-triviale, à corps résiduel parfait. On note $\mathcal{I}(G, K)$ l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif connexe G sur K . C'est l'immeuble noté $\mathcal{B}(G, K)$ dans [21, §2.1], l'immeuble centré noté $\mathcal{I}_K(G)$ dans [19, 2.1.15], ou enfin l'immeuble étendu noté $\mathcal{BT}^e(G, K)$ dans [9, 1.3.2]. En particulier,

$$(2.1) \quad \mathcal{I}(G, K) = \mathcal{I}'(G, K) \times V(G, K) \quad \text{où} \quad V(G, K) = X_\star^K(Z(G)) \otimes \mathbb{R}.$$

L'immeuble $\mathcal{I}'(G, K)$ est noté $\mathcal{I}'_K(G)$ dans [19] et $\mathcal{BT}(G, K)$ dans [9]; il est canoniquement isomorphe à l'immeuble $\mathcal{I}(G', K)$ du groupe dérivé G' de G . Par ailleurs, on a noté $X_\star^K(Z(G)) = X_\star(Z^K(G))$ le groupe des cocaractères du plus gros sous-tore déployé $Z^K(G)$ du centre $Z(G)$ de G . On note x' et x^v les composantes d'un point $x = (x', x^v)$ de $\mathcal{I}(G, K) = \mathcal{I}'(G, K) \times V(G, K)$.

2.2. — L'immeuble $\mathcal{J}(G, K)$ est muni d'une action à gauche de $G(K)$, d'une structure poly-simpliciale invariante sous $G(K)$ (qui donne une partition en facettes), et il est recouvert par des espaces affines (les appartements) qui sont des réunions de facettes; il y a une bijection $G(K)$ -équivariante $S \mapsto \mathcal{U}(S)$ entre l'ensemble des tores déployés maximaux S de G et l'ensemble des appartements de $\mathcal{J}(G, K)$, l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{U}(S)$ est égal à $X_*(S) \otimes \mathbb{R}$, l'action du normalisateur $\mathcal{N}(S)$ de S dans $G(K)$ sur $\mathcal{U}(S)$ est affine, et la partie vectorielle de cette action est l'action par conjugaison de $\mathcal{N}(S)$ sur $X_*(S)$.

2.3. — Ces structures sont compatibles avec la décomposition (2.1). En particulier, les applications $F' \mapsto F' \times V(G, K)$ et $\mathcal{U}' \mapsto \mathcal{U}' \times V(G, K)$ sont des bijections $G(K)$ -équivariantes de l'ensemble des facettes (resp. appartements) de $\mathcal{J}'(G, K)$ sur ceux de $\mathcal{J}(G, K)$. L'action de $g \in G(K)$ sur $x = (x', x^v) \in \mathcal{J}(G, K)$ est

$$g \cdot x = (g \cdot x', x^v + v_G(g)) = (g \cdot x', x^v) + v_G(g)$$

pour un vecteur $v_G(g) \in V(G, K)$, et le morphisme

$$v_G : G(K) \rightarrow V(G, K)$$

est caractérisé par la formule suivante : pour tout caractère $\chi : G \rightarrow \mathbb{G}_{m, K}$,

$$\langle \nu_G(g), \chi | Z^K(G) \rangle_{\mathbb{R}} = -\omega(\chi(g))$$

où $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}}$ est l'extension $\mathbb{R}$ -linéaire de l'accouplement usuel

$$\langle -, - \rangle : X_*(Z^K(G)) \times X^*(Z^K(G)) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

2.4. — On peut de plus munir $\mathcal{J}(G, K)$ d'une métrique $G(K)$ -invariante, dont la restriction à chaque appartement est euclidienne, et qui fait de $\mathcal{J}(G, K)$ un espace métrique complet, géodésique, et CAT(0). Contrairement aux autres structures, la distance euclidienne d sur $\mathcal{J}(G, K)$ n'est pas tout à fait canoniquement associée à (G, K) . Elle se décompose en

$$d(x, y) = \sqrt{d'(x', y')^2 + (x^v, y^v)^2}$$

où d' est une métrique $G(K)$ -invariante sur $\mathcal{J}'(G, K)$ qui est essentiellement unique, mais où $(-, -)$ est un produit scalaire arbitraire sur $V(G, K)$. Cependant, la topologie qui en résulte sur $\mathcal{J}(G, K)$ ne dépend pas du choix de cette distance.

2.5. — La functorialité en G et/ou K de l'immeuble $\mathcal{J}(G, K)$ est une question délicate (cf. [19, 15, 9, 4]), mais la démonstration des cas dont nous aurons besoin ci-dessous remonte aux travaux de Bruhat et Tits.