COURS SPÉCIALISÉS 4

SPECTRES DE GRAPHES

Yves Colin de Verdière

Société Mathématique de France 1998

Yves Colin de Verdière
Institut Fourier, BP 74, F-38402-St Martin d'Hères Cedex.
E-mail : yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 05C10, 05C15, 05C50, 35J10, 58G25.

***Mots clefs.* —** Graphe, spectre de graphe, plongement de graphe, perturbation singulière de valeurs propres, effet tunnel, éléments finis, équation de Schrödinger.

SPECTRES DE GRAPHES

Yves Colin de Verdière

Résumé. **—** Le but de ce livre est de développer pour les graphes finis l'analogue de la théorie spectrale pour les opérateurs du type laplacien riemannien ou opérateur de Schrödinger sur une variété compacte.

Dans le cas des graphes, les objets de base sont les opérateurs de type Schrödinger (avec ou sans champ magnétique) sur un graphe fini. Ces ensembles contiennent les laplaciens canoniques étudiés habituellement. Ils contiennent aussi ceux que l'on rencontre comme limites singulières d'opérateurs continus, dans les méthodes numériques du type éléments finis ainsi que les générateurs de processus de Markov réversibles.

Après un premier chapitre où sont données les premières définitions et des exemples de problèmes conduisant à des spectres de graphes et un deuxième chapitre consacré aux généralités d'analyse fonctionnelle (minimax, théorèmes de Perron-Frobenius et de Courant, mesures spectrales), on aborde quatre sujets : le *trou spectral* et les fameuses *inégalités de Cheeger*, les *multiplicités* et analogues discrets du théorème de Cheng, *discret et continu* et *réseaux électriques*.

Abstract **(Spectra of graphs). —** The aim of this book is to develop for finite graphs some analogues of the spectral theory of Schrödinger operators on compact manifolds.

For graphs, the basic objects are sets of Schrödinger type operators (with or without magnetic field). These sets include the canonical Laplacians on graphs which are usually considered as well as singular limits of continuous Schrödinger operators, singular limits of reversible Markov processes or finite elements methods.

After two introductory chapters (definitions and basic examples, functional analysis, Perron-Frobenius and Courant nodal theorems, eigenvalues perturbation theory), the subjects presented in this book are: spectral gaps and Cheeger's inequalities, multiplicities of eigenvalues and Cheng's type theorem, discrete and continuous Schrödinger operators and electrical networks.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

L'origine de ce livre est un cours de DEA donné à l'ENS Lyon de février à juin 1994. Je me suis également inspiré de plusieurs textes de survol que j'ai écrits ([**CdV93, CdV97b**]).

Le sujet étant extrêmement vaste, je n'ai pas tenté de le décrire complètement (l'intersection avec les livres [**CDS80**], [**Chu97**] et [**Lub94**] est presque vide), mais me suis laissé guider par mes propres centres d'intérêt.

Remerciements. — J'ai largement utilisé les notes prises par Frédéric Mathéus que je tiens à remercier ici. Je remercie aussi Roland Bacher qui a relu le texte avec une grande rigueur et suggéré de nombreuses et précieuses améliorations.

Enfin, je tiens à exprimer ici tout ce que je dois à François Jaeger (1947-1997) dont la disparition laisse un grand vide : c'est à lui que je dois ce que j'ai pu apprendre de la théorie des graphes ; sa patience, sa disponibilité et sa culture m'ont toujours émerveillé. Plus qu'un collègue et un maître, c'est surtout un ami que nous avons perdu. J'espère qu'il aurait aimé ce livre . . .

INTRODUCTION

Le but est de développer pour les graphes finis l'analogue de la théorie spectrale pour les opérateurs du type laplacien riemannien ou opérateur de Schrödinger (voir [**BGM71, CFKS87**]). Si l'on se donne une variété compacte X, il y a plusieurs familles naturelles d'opérateurs différentiels elliptiques auto-adjoints sur X : les laplaciens riemanniens Δ_g construits à partir d'une métrique riemannienne g sur X, les opérateurs de Schrödinger qui sont de la forme $H = \Delta_g + V$ où $V \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ et les opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique plus compliqués à définir, utilisant outre la métrique g, la donnée d'un fibré hermitien de dimension 1 sur X muni d'une connexion hermitienne ∇.

Ces opérateurs ont un spectre discret infini

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

qui ne s'accumule qu'en $+\infty$. On adopte (ici et d'une façon générale dans ce livre) la convention de répéter chaque valeur propre suivant sa multiplicité.

De façon un peu schématique et arbitraire, on peut diviser la théorie spectrale de ces opérateurs en deux thèmes : la théorie asymptotique (asymptotique *semi-classique*) des grandes valeurs propres et la théorie des *premières valeurs propres* (minoration du trou spectral en termes géométriques, multiplicités).

Dans le cas des graphes, on a les analogues des trois familles précédentes. Les objets de base sont les opérateurs de type Schrödinger (avec ou sans champ magnétique) sur un graphe G. Ces ensembles (M_G et O_G) contiennent les laplaciens canoniques étudiés habituellement [**CDS80**]. Ils contiennent aussi ceux que l'on rencontre comme limites singulières d'opérateurs continus, dans les méthodes numériques du type éléments finis ainsi que les générateurs de processus de Markov réversibles.

Bien sûr, ce n'est pas seulement une analogie formelle entre le cas continu et le cas discret : il y a de multiples passages de l'un à l'autre (effet tunnel semi-classique, limites singulières de domaines ou de variétés, méthodes des éléments finis). Certains thèmes ou résultats ont des versions dans les deux contextes :

– L'inégalité de Cheeger, découverte dans le cas du laplacien riemannien, n'a été trouvée pour les graphes que plus tard bien qu'elle soit bien plus simple !

– Un autre sujet important pour le laplacien riemannien est l'étude spectrale des dégénérescences de variétés riemanniennes (effondrement). Il se trouve que l'on peut faire une étude très poussée de cette question dans le cas des graphes liée à diverses notions de contraction d'un graphe, par exemple celle de mineurs.
– Enfin le célèbre problème de Caldéron[(1)] est bien sûr l'analogue continu de la détermination d'un réseau électrique résistif à partir de sa réponse.

L'idée de ce livre est donc de présenter le spectre des opérateurs sur les graphes en ayant en tête les analogues continus. Ce livre peut donc servir aussi comme introduction au spectre du laplacien riemannien !

Les sujets abordés dans ce livre sont les suivants : après un premier chapitre où sont données les premières définitions et des exemples de problèmes conduisant à des spectres de graphes et un deuxième chapitre consacré aux généralités d'analyse fonctionnelle (minimax, théorèmes de type Courant, mesures spectrales), on aborde quatre sujets.

Trou spectral. — On introduit le *trou spectral* et les fameuses *inégalités de Cheeger*. On ne donne pas ici de construction de familles optimales de graphes (graphes de Ramanujan), mais on se contente de décrire la cosntruction de Gabber-Galil. Cela mène directement à la propriété (T) de Kazhdan pour $SL_3(\mathbb{Z})$.

Multiplicités. — On s'intéresse aux analogues du théorème de Cheng [**Che76**] pour les graphes :

Théorème. — *Si g est une métrique riemannienne quelconque sur la sphère S^2, la multiplicité de la valeur propre λ_2 du laplacien Δ_g est ≤ 3.*

Cela nécessite d'introduire des idées liées à la transversalité et aux limites singulières de matrices symétriques (Γ-convergence).

On construit à partir de là des invariants numériques des graphes liés au genre et à la largeur d'arbre.

Discret et continu. — Une motivation importante pour étudier le spectre des opérateurs sur les graphes est d'obtenir des informations sur le cas continu. C'est pourquoi nous indiquons quelques passages du continu au discret : méthodes numériques, limite semi-classique.

Réseaux électriques. — Enfin, on considère les problèmes de type Dirichlet pour un graphe muni d'un bord : on définit la réponse d'un réseau électrique résistif et caractérise les réponses des réseaux planaires circulaires selon [**CdV94**] et [**CdVGV96**].

(1) celui de la détermination de la conductivité d'une plaque métallique à partir de l'application qui, à un potentiel appliqué sur le bord, associe le courant sortant