Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MOTIFS DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RIGIDES

Numéro 140-141
Nouvelle série

2 0 1 5

Joseph AYOUB

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 60 € (\$ 90)
Abonnement Europe : 136 € hors Europe : 153 € (\$ 231)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-285629-811-4

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

MÉMOIRES DE LA SMF 140/141

MOTIFS DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RIGIDES

Joseph Ayoub

Société Mathématique de France 2015
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Ayoub
Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, CH-8057 Zürich, Switzerland.
CNRS, LAGA Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France.
E-mail : `joseph.ayoub@math.uzh.ch`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 14C15, 14C25, 14F20, 14F35, 14F42, 14G22.

***Mots clefs*. —** Géométrie analytique rigide, théorie de l'homotopie stable motivique, motifs, motifs rigides analytiques.

Remerciements. — Les recherches qui ont abouti à ce travail ont commencé en 2006 vers la fin de mon doctorat effectué à l'IMJ (Université de Paris 7). Elles ont été menées à bout durant l'année académique 2006-2007 pendant laquelle j'étais membre de l'IAS (Princeton) et chargé de recherche CNRS au LAGA (Université de Paris 13). Je remercie les institutions ci-mentionnées pour leur soutien. Je tiens également à remercier le rapporteur pour sa lecture minutieuse, ses commentaires pertinents et pour avoir noté une erreur dans la preuve de la proposition 2.2.23.

MOTIFS DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RIGIDES

Joseph Ayoub

***Résumé.* —** Dans ce travail, j'étends la théorie des motifs, comme développée par Voevodsky et Morel-Voevodsky, au cadre de la géométrie analytique rigide sur un corps complet non archimédien.

Le premier chapitre reprend l'approche homotopique de Morel et Voevodsky. On y trouve la construction de la catégorie homotopique stable motivique des variétés analytiques rigides ainsi qu'une description complète de cette dernière en termes de motifs algébriques lorsque le corps de base est d'égale caractéristique nulle et de valuation discrète. Le second chapitre reprend l'approche par les transferts de Voevodsky. On y trouve la construction de la catégorie triangulée des motifs analytiques rigides, ainsi qu'une extension à la géométrie rigide d'une grande partie des résultats fondamentaux de Voevodsky et notamment sa théorie des préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie. Ceci dit, le présent travail ne se résume pas à un simple décalque de la théorie classique et le lecteur trouvera beaucoup de résultats nouveaux et spécifiques au contexte de la géométrie rigide.

***Abstract* (Motives of rigid analytic varieties). —** In this work, I extend the theory of motives, as developed by Voevodsky and Morel-Voevodsky, to the context of rigid analytic geometry over a complete non archimedean field.

The first chapter deals with the homotopical approach of Morel and Voevodsky. One finds there the construction of the motivic stable homotopy category of rigid analytic varieties and a complete description of this category in terms of algebraic motives when the base field has equal characteristic zero and its valuation is discrete. The second chapter deals with Voevodsky's approach based on transfers. One finds there the construction of the triangulated category of rigid analytic motives, and an extension to rigid analytic geometry of a large number of Voevodsky's fundamental results such as his theory of homotopy invariants presheaves with transfers. This is said, the present work is a lot more than just a mere copy of the classical theory and the reader will find a lot of results that are new and specific to rigid analytic geometry.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale 1

1. Motifs des variétés rigides analytiques I : version sans transferts et lien avec le foncteur « motif proche » 13

Introduction 13

1.1. Rappels et compléments de géométrie rigide 14

1.1.1. Généralités 14

1.1.2. Algèbres affinoïdes et variétés rigides 16

1.1.3. Le foncteur d'analytification 22

1.1.4. La fibre générique de Raynaud et les modèles formels 25

1.1.5. Points en géométrie rigide 31

1.1.6. Morphismes lisses et étales 38

1.1.7. Modèles semi-stables 52

1.2. La topologie de Nisnevich en géométrie rigide 55

1.2.1. Définition et propriétés basiques de la topologie de Nisnevich 56

1.2.2. Carrés Nisnevich et propriété de Brown-Gersten 66

1.2.3. Engendrement par des k-affinoïdes ayant potentiellement bonne réduction 75

1.2.4. Topologies de Nisnevich et foncteur d'analytification 81

1.3. Les catégories $\mathbb{B}^1$-homotopiques des k-variétés rigides 83

1.3.1. Construction et propriétés élémentaires : cas instable 83

1.3.2. Motifs rigides de quelques variétés algébriques 90

1.3.3. Construction et propriétés élémentaires : cas stable 100

1.3.4. Énoncé du résultat principal et réductions 105

1.4. Le 2-foncteur homotopique stable $\mathbf{RigSH}(-)$ 126

1.4.1. Les k°-schémas rigides 126

1.4.2. La construction des dérivateurs $\mathbf{RigSH}(-)$ et $\mathbf{FSH}(-)$ 128

1.4.3. L'axiome de localité pour $\mathbf{RigSH}(-)$ et $\mathbf{FSH}(-)$ 135

1.4.4. Fin de la vérification des axiomes et quelques compléments 146

1.4.5. Démonstration du théorème 1.3.38 154

1.A. Appendice : complément sur les opérations de Grothendieck dans le monde motivique 160

2. Motifs des variétés rigides analytiques II : étude cohomologique des préfaisceaux avec transferts, surconvergents et invariants par homotopie . . . 169
2.1. Rappels et compléments de géométrie rigide (suite) . . . 170
2.1.1. Domaines de la droite affine et leur cohomologie . . . 170
2.1.2. Préfaisceaux et faisceaux surconvergents . . . 187
2.2. Correspondances finies et préfaisceaux avec transferts en géométrie rigide . . . 201
2.2.1. Faisceaux fh et multiplicités d'intersection . . . 201
2.2.2. Correspondances finies et préfaisceaux avec transferts sur SmAfnd/k . . . 213
2.2.3. Préfaisceaux avec transferts sur SmRig/k et compléments . . . 222
2.2.4. Préfaisceaux avec transferts $\mathbb{B}^1$-invariants : propriétés élémentaires . . . 228
2.2.5. Fibres d'un préfaisceau avec transferts $\mathbb{B}^1$-invariant . . . 233
2.3. Invariance par homotopie et groupe de Picard relatif . . . 257
2.3.1. Groupe de Picard relatif et correspondances finies à homotopie près . . . 258
2.3.2. Construction de correspondances finies à homotopie près . . . 271
2.4. Cohomologie Nisnevich d'un préfaisceau avec transferts, surconvergent et $\mathbb{B}^1$-invariant . . . 284
2.4.1. Étude de la restriction au petit site de la boule de Tate . . . 284
2.4.2. Invariance par homotopie de la cohomologie et applications . . . 291
2.4.3. Exemples de préfaisceaux avec transferts, surconvergents et $\mathbb{B}^1$-invariants . . . 296
2.5. La catégorie $\mathbf{RigDM}(k)$ des motifs des variétés rigides . . . 305
2.5.1. Construction de $\mathbf{RigDM}(k)$ et propriétés élémentaires . . . 305
2.5.2. Engendrement par les motifs rigides de variétés algébriques et t-structure homotopique . . . 322
2.5.3. Théorème de simplification ou le « cancellation theorem » . . . 342
2.5.4. Description en termes de motifs algébriques . . . 352

Bibliographie . . . 379

Index . . . 383

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans ce travail, j'étends la théorie des motifs, comme développée par Voevodsky [**46**], et Morel et Voevodsky [**30**], au cadre de la géométrie analytique rigide sur un corps complet non archimédien. Certes, il s'agit en partie d'adapter les techniques déjà existantes de la théorie des motifs des variétés algébriques et de les appliquer aux variétés analytiques rigides. Mais ce travail ne se résume pas à un simple décalque de la théorie de Morel et Voevodsky et à la construction de nouvelles catégories motiviques. Ainsi, je m'efforcerai dans cette introduction de mettre en évidence l'originalité du présent travail et de souligner les idées nouvelles qui, hélas, ont pu être noyées dans le style systématique du texte. Ensuite, j'esquisserai quelques applications possibles de cette théorie.

Il existe deux approches modernes à la théorie des motifs des variétés algébriques. La première, d'un point de vue logique mais pas historique, est l'*approche homotopique* de Morel et Voevodsky [**30**] dont résultent la catégorie homotopique des k-schémas $\mathbf{H}(k)$ et sa version stable $\mathbf{SH}(k)$ (voir [**26**]). Elle est entièrement basée sur la théorie de l'homotopie, via la machinerie des catégories de modèles, et, par conséquent, se prête moins aux « calculs ».

La seconde, est l'*approche par les transferts* de Voevodsky [**46**] dont résulte la catégorie des motifs triangulés $\mathbf{DM}(k)$. Elle est plus géométrique et il est possible de décrire explicitement dans cette théorie les objets motiviques en termes de cycles algébriques. Toutefois, la seconde approche est limitée : par exemple, elle ne permet pas de retrouver la K-théorie algébrique, contrairement à la première.

Bien entendu, ces deux approches se comparent et il est instructif, et souvent pertinent, de comparer le lien entre $\mathbf{SH}(k)$ et $\mathbf{DM}(k)$ à celui entre $\mathbf{SH}$, la catégorie homotopique stable des espaces topologiques, et $\mathbf{D}(\mathbb{Z})$, la catégorie dérivée de celle des $\mathbb{Z}$-modules.

Dans ce travail, je reprends les deux approches, homotopique et par les transferts, dans le cadre de la géométrie rigide.

L'approche homotopique ou le premier chapitre

Soit k un corps complet non archimédien. On note k° son anneau de valuation et $\widetilde{k}$ son corps résiduel.

Les ingrédients de la construction. — Ici, les ingrédients de base sont les k-variétés rigides lisses, la topologie de Nisnevich en géométrie rigide et la boule de Tate. La première section du chapitre 1 est entièrement consacrée à des rappels de géométrie rigide. Elle ne contient aucun résultat original, et le lecteur familier avec les fondements de la géométrie rigide suivant Tate et Raynaud pourra l'ignorer et passer à la suite.

Dans la section 1.2, j'introduis l'analogue de la topologie de Nisnevich pour les variétés analytiques rigides. Comme en géométrie algébrique, il s'agit d'une topologie intermédiaire entre la topologie étale, trop fine pour les théories cohomologiques motiviques, et la topologie des recouvrements admissibles, trop grossière pour assurer la pureté. Étant donné un modèle formel $\mathcal{X}$ de X (voir la définition 1.1.22), on peut associer à un recouvrement Nisnevich du $\widetilde{k}$-schéma $\mathcal{X}_\sigma$ un recouvrement Nisnevich de X. Réciproquement, on obtient, à raffinement près, tout recouvrement Nisnevich de X à partir d'un recouvrement Nisnevich de $\mathcal{X}_\sigma$, pour un modèle $\mathcal{X}$ suffisamment fin. Cette propriété est fort utile et ramène en grande partie l'étude de la topologie de Nisnevich en géométrie rigide à celle de la toplogie de Nisnevich en géométrie algébrique.

Un résultat notable de la section 1.2 est le théorème 1.2.36. Il fournit des générateurs particulièrement simples de la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmRig}/k, \mathbb{Z}))$. (Ici, SmRig/k est le site Nisnevich des k-variétés analytiques rigides lisses et $\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmRig}/k, \mathbb{Z})$ est la catégorie abélienne des faisceaux sur ce site.) Le théorème 1.2.36, en fait un cas particulier, affirme que $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmRig}/k, \mathbb{Z}))$ est engendrée, en tant que catégorie triangulée avec petites sommes, par les faisceaux représentés par des k-affinoïdes ayant potentiellement bonne réduction. (Rappelons qu'un k-affinoïde X admet bonne réduction s'il possède un modèle formel $\mathcal{X}$ lisse sur k° ; il admet potentiellement bonne réduction s'il acquiert bonne réduction après extension des scalaires à une extension finie de k.) Ce théorème nécessite que la valuation de k soit discrète et que $\widetilde{k}$ soit de caractéristique nulle. Dans ce cas, on a $k = \widetilde{k}((\pi))$, le corps des séries de Laurent en l'uniformisante π. Ce résultat est surprenant surtout, qu'en général, il est impossible de couvrir une variété rigide (même lisse) par des affinoïdes ayant potentiellement bonne réduction. De plus, il est propre à la géométrie rigide et n'admet pas d'analogue (non vide) en géométrie algébrique.

La construction. — Il n'est guère surprenant pour le lecteur familier avec la théorie de Morel et Voevodsky qu'il est possible de construire une catégorie homotopique stable $\mathbf{RigSH}(k)$ à partir du site Nisnevich des k-variétés rigides lisses muni de l'intervalle $\mathbb{B}^1_k$, qui est la boule de Tate. J'explique les détails de cette construction dans les paragraphes 1.3.1 (version instable) et 1.3.3 (version stable) de la section 1.3. Les objets de $\mathbf{RigSH}(k)$ sont les *motifs rigides*. À toute k-variété rigide lisse V, il est associé un motif rigide $\mathrm{M}(V)$. Je construis également un foncteur d'analytification :

$$\mathrm{Rig}^* : \mathbf{SH}(k) \longrightarrow \mathbf{RigSH}(k) \tag{1}$$

qui étend le foncteur d'analytification usuel associant à un k-schéma lisse X la k-variété rigide lisse X^{an} (voir le paragraphe 1.1.3). Plus précisément, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Rig}^*\mathrm{M}(X) \simeq \mathrm{M}(X^{\mathrm{an}})$ avec $\mathrm{M}(X)$ le motif (usuel) associé à X.