Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 271–305.

L'ÉCOLE CONSTRUCTIVE DE MARKOV

Maurice Margenstern (*)

Résumé. — Cet article donne les principales caractéristiques de l'école constructive d'Andrej Andreevich Markov (1903–1979). Après un bref rappel de la situation des mathématiques et de la logique au début du XXe siècle, on évoque rapidement la naissance de l'intuitionnisme et de la théorie des fonctions récursives. On décrit ensuite les objets et les méthodes du constructivisme de Markov. A titre d'exemples on expose les principaux résultats relatifs à l'analyse réelle selon le point de vue de Markov. On termine en soulignant l'intérêt de ces résultats pour les mathématiques d'aujourd'hui.

Abstract. — The constructivist school of Markov. This paper sets out the main features of the constructivist school, as promoted by Andrej Andreevich Markov (1903–1979). After a short survey of the situation pertaining in mathematics and logic, at the beginning of the 20th century, the emergence of intuitionism, and of recursive function theory, is sketched in. The paper then outlines the aims and methods of Markov's constructivism — reviewing, by way of illustration, the major results obtained through Markov's approach, in the field of real-number analysis. Finally, emphasis is laid on the current relevance of such results for present-day mathematics.

1. PROLOGUE

Née au début des années 1950, l'école constructive d'Andrej Andreevich Markov occupe une place originale parmi les courants qui ont surgi en réponse à la crise des fondements des mathématiques du début de ce siècle. Ses liens avec des problèmes pratiques d'informatique apparus récemment viennent le confirmer, s'il en était besoin. Pour bien comprendre les choix de cette école et, *a fortiori*, pour apprécier son apport à la logique contemporaine, il convient de revenir non seulement à la problématique qui lui a donné naissance, mais encore de rappeler l'histoire qui l'a précédée, ne serait-ce qu'à grands traits.

(*) Texte reçu le 10 mars 1994, révisé le 14 juin 1995.
Maurice Margenstern, Université de Metz, I.U.T., Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 1 (France). Courrier électronique : margens@iut.univ-metz.fr et margens@litp.ibp.fr.

© société mathématique de france, 1995

1.1. Une histoire ancienne

On peut faire remonter les origines de la problématique constructive au moins à la distinction qu'Aristote introduisit, au IVe siècle avant notre ère, entre *infini actuel* et *infini potentiel*.

L'infini potentiel, c'est-à-dire l'infini en puissance est un processus qui se prolonge sans cesse mais reste à chaque étape fini. Une illustration de ce point de vue se trouve dans la façon dont Euclide démontre l'infinitude des nombres premiers : il se contente de démontrer qu'étant donné n nombres premiers on peut toujours en construire un $(n+1)$-ième.

En revanche, la notion d'infini actuel consiste à considérer un ensemble infini comme existant dans sa totalité. Dans l'exemple des nombres premiers, la majorité des mathématiciens d'aujourd'hui pense que l'ensemble infini de ces nombres peut être considéré comme un tout achevé sur lequel il est permis d'opérer selon des règles bien précises.

En première approximation, nous admettrons que le développement de l'activité mathématique n'a guère permis d'aborder cette question de l'intérieur même des mathématiques avant le début du XIXe siècle, même si les réflexions de Galilée au début du XVIIe siècle, de Leibniz à la fin de ce même siècle et toutes celles qui ont entouré l'essor du calcul infinitésimal conduisent à nuancer une telle affirmation. C'est que, dans une très large mesure, on peut estimer que tout ce qui a été produit en mathématiques jusqu'au début du XIXe siècle est *contructif* au sens que nous préciserons un peu plus loin[1].

Le XIXe siècle, par contre, à la fois par les résultats, les méthodes envisagées et les discussions qui les ont entourés, amorce une étape nouvelle où le problème de l'*effectivité* en mathématique est posé explicitement et où, parallèlement, les prémices des solutions que le XXe siècle apportera apparaissent également[2].

1.2. Le début du XXe siècle

Les développements de l'analyse tout au long du XIXe siècle ont conduit

[1] Indiquons, en première approximation, que seuls les théorèmes d'existence abstraite établis au XIXe siècle sont non constructifs comme, exemple important, le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions numériques continues sur un segment.

[2] Kronecker (voir notamment [1887]) a été l'un des précurseurs du courant constructiviste. Il est cité comme tel par les fondateurs de presque toutes les écoles constructivistes.

à une présentation des notions fondamentales de cette discipline assez proche de ce que nous connaissons actuellement. Parallèlement, les progrès en arithmétique et en algèbre ont permis de s'attaquer avec succès aux problèmes de logique. Le calcul propositionnel est constitué, les notions d'axiomes et de règles bien dégagées[3]. Il est enfin possible de s'atteler à l'étude du difficile calcul des prédicats mis au jour par Frege.

Mais à peine s'était-il établi un consensus optimiste sur la solidité des fondements constitués dans le derniers tiers du XIXe siècle que le passage au XXe s'est produit dans la plus grande confusion : la crise des fondements a éclaté et elle ne cesse de faire rage. Les paradoxes sémantiques connus depuis l'Antiquité jouent un tour quelque peu fâcheux à la théorie *naïve* des ensembles dont la beauté ingénue avait séduit le monde mathématique. Elle ne s'en relèvera pas et, sous certaines latitudes, la logique souffrira longtemps (et souffre encore) d'avoir été celle par qui le scandale est arrivé.

La logique, qui s'emploiera à fournir tant bien que mal les fondements les moins mal assurés possibles à une communauté mathématique de plus en plus irritée par ces problèmes fondationnels, va se heurter au même obstacle que chaque idée nouvelle au moment de son apparition[4] : les croyances des mathématiciens de l'époque issues de l'expérience antérieure. L'importance du choc et le fait que les travaux fondationnels restent une préoccupation de notre siècle méritent qu'on s'attarde un peu sur cette question.

Remarquons tout d'abord que la logique est la première à adopter, dès le début du XXe siècle, une démarche *finitiste* : une démonstration doit nécessairement ne mettre en œuvre que des moyens finis dans le cadre d'un processus lui-même fini. Cette pierre de touche posée par Hilbert au congrès international des mathématiciens à Paris en 1900 n'a généralement pas été remise en cause[5]. C'est de plus un point de départ commun à tous les courants constructivistes.

Remarquons ensuite que fort de l'énorme développement scientifique du XIXe siècle[6], le début du XXe siècle a caressé deux ambitions en matière de

[3] Frege, puis Russell et Hilbert y ont joué un grand rôle.

[4] Rappelons simplement la découverte des nombres irrationnels, celle des nombres complexes, celle des infiniment petits et grands, celle enfin des géométries non euclidiennes, la liste n'étant pas limitative.

[5] Ce que ne contredit pas l'étude de logiques *infinitaires* conduites dans un autre but.

[6] On ne répétera jamais assez que sur le seul plan mathématique, l'œuvre du XIXe

connaissance scientifique : celle de tout savoir et celle de s'affranchir des contradictions. Ces ambitions supposent bien entendu que le but recherché est accessible. Les logiciens de cette époque vont transposer ces objectifs dans leur domaine en leur donnant le fondement le plus maximaliste : l'objectif de *tout savoir* est transformé en celui de *tout démontrer*, ce qui n'est pas la même chose[7]. Quant à l'affranchissement des contradictions, l'école de Hilbert l'a transformé en la recherche d'une preuve *interne* de non-contradiction.

Connaissant la suite de l'histoire, serait-il pertinent de juger nos prédécesseurs du haut des théorèmes d'incomplétude de Gödel qui ont sans doute frappé de stupeur plusieurs d'entre eux en montrant le caractère excessif de la traduction *interne* d'objectifs poursuivis hors du discours mathématique[8] lui-même ? Ce serait oublier que leur démarche a produit des concepts foncièrement nouveaux : le programme finitiste de Hilbert (voir [Sinaceur 1993]), les machines de Turing, les fonctions récursives et bien d'autres. Ce serait oublier que ces nouveaux concepts ont connu des développements imprévus, dont sont issus les fondements d'une science nouvelle : l'informatique.

S'écartant du sillage ouvert à cette époque par la formalisation réussie de théories mathématiques, un certain nombre de mathématiciens et de logiciens se sont efforcés de trouver d'autres fondements des mathématiques. Parmi eux, les fondateurs des courants constructivistes et donc, du premier d'entre eux, l'intuitionnisme.

1.3. L'intuitionnisme

Fondé par le mathématicien hollandais Brouwer à partir du début des

siècle contient de nombreux travaux qui n'ont pas encore été analysés. Chaque année qui passe voit la redécouverte de résultats qui ont sommeillé jusqu'ici, dans les pages précieusement conservées de revues qui n'ont pas survécu.

[7] Supposant cette fois encore que c'est possible, on sous-entend donc que, pour tout énoncé sans paramètre, on peut *démontrer* soit qu'il est vrai, soit qu'il est faux. C'est ce qu'on chercha à établir et, comme on le sait, on échoua.

[8] Le problème s'est posé à de nombreuses reprises. Une première fois dès le XIXe siècle, lorsque Dedekind chercha à obtenir l'existence d'objets *infinis* à partir des seules lois de la pensée. Toujours au siècle précédent, on a attendu pour admettre les géométries non euclidiennes que les premiers *modèles* de celles-ci dans la géométrie euclidienne soient construits, prouvant ainsi que si les premières étaient *absurdes*, c'est-à-dire contradictoires, la seconde le serait aussi. Dans notre siècle, l'exemple le plus récent est celui de l'hypothèse du continu dont Paul Cohen démontra l'indépendance en 1962.

années 1910, l'intuitionnisme est surtout connu par les polémiques qu'il a suscitées et l'opposition très vive entre Brouwer et Hilbert[9]. Prolongeant les idées de Kronecker qui s'en prenait déjà au recours à l'infini actuel en mathématiques, Brouwer rejette cette notion et fixe comme objectif des mathématiques l'étude des *constructions mathématiques mentales*. L'idée maîtresse de l'intuitionnisme et que reprendront après lui tous les courants constructivistes, est de présenter les objets mathématiques comme des résultats de *processus de construction* et les preuves de propriétés de ces objets comme des processus de construction [Heyting 1956]. Ainsi l'implication $A \Rightarrow B$ est-elle interprétée d'une façon *opérationnelle* : regardant A et B comme des *problèmes*, on dispose d'une construction qui transforme toute construction d'une solution de A en une construction d'une solution de B. Il en résulte une logique sans *tiers exclu* (voir [Kolmogorov 1925], [Glivenko 1928, 1929]) que nous analyserons plus loin.

Mais qu'est-ce au juste qu'une *construction*? L'intuitionnisme refuse de donner une réponse définitive à cette question et admet comme objets bien définis des constructions établies sur le célèbre modèle suivant (voir [Heyting 1956/1971][10]) : considérant la suite π_n des décimales de π, on pose $a_n = 1$ si la suite de chiffres $\pi_n \pi_{n+1} \ldots \pi_{n+9}$ est la suite 0123456789 et $a_n = 0$ sinon. Si l'on considère alors le réel $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . 2^{-n}$, on ne peut pas dire, pour l'instant, si a est nul ou pas. Brouwer recourt souvent à ce type d'arguments pour réfuter certains théorèmes de l'analyse classique.

Brouwer développe ensuite une analyse mathématique fondée sur la notion de *suite de choix libres* qu'il distingue de la notion de suite gouvernée par une loi. La notion de suite de choix libres lui permet de démontrer un *théorème de l'éventail* sur la structure des arbres infinis à branchements finis, qui permet d'établir en analyse intuitionniste que *toute fonction de* $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *est uniformément continue*, donc admet une borne inférieure et une borne supérieure. Cependant, le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus valable dans le cadre intuitionniste.

Les théorèmes de Brouwer sur les fonctions d'une variable réelle datent des années 1920, donc *avant* que ne se produise, au milieu des années 1930, l'évènement très important que nous allons examiner à présent et qui

[9] Voir [van Dalen 1990] et les articles traduits par Largeault [1992].

[10] Pages 16, 24, 29, 30, 40, 61, 66-67, 113-114 et 119.