Revue d'histoire des mathématiques,
4 (1998), p. 163–190.

LAZARE CARNOT ET LA GÉNÉRALITÉ EN GÉOMÉTRIE. VARIATIONS SUR LE THÉORÈME DIT DE MENELAUS

Karine CHEMLA (*)

RÉSUMÉ. — Comment introduire de la généralité dans un monde géométrique où une foule de vérités particulières, établies par des méthodes *ad hoc*, restent sans liaison entre elles et forment donc un ensemble sans organisation ? En suivant les divers traitements d'un unique théorème, appelé aujourd'hui le *théorème de Menelaus*, le présent article vise à examiner comment les travaux géométriques de Lazare Carnot ont indiqué, aux géomètres comme Poncelet ou Chasles qui posaient cette question, diverses pistes pour y répondre.

ABSTRACT. — LAZARE CARNOT AND GENERALITY IN GEOMETRY. VARIATIONS ABOUT THE SO CALLED MENELAUS THEOREM. — How can generality be introduced in a geometrical world where a host of particular truths, established with *ad hoc* methods, remain disconnected from each other and, hence, form a set without organisation ? Geometers like Poncelet and Chasles asked this question. By examining the various treatments given to a single theorem, called today *Menelaus theorem*, this paper aims at examining how Lazare Carnot's geometrical works offered various directions of answer.

Les écrits de géomètres du début du XIX[e] siècle tels que Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles sont émaillés de remarques comparant les mérites respectifs des méthodes analytiques et géométriques pour résoudre des problèmes de géométrie. Ces remarques renvoient à une visée commune de leurs travaux mathématiques ou historiques : comprendre ce qui

(*) Texte reçu le 10 juillet 1996, révisé le 10 août 1998.
Karine CHEMLA, REHSEIS (UMR 7596), CNRS et Université Paris 7 Denis Diderot, 37 rue Jacob, 75006 Paris (France). Courrier électronique : chemla@paris7.jussieu.fr.
Ce texte devait initialement paraître dans un recueil d'articles, *La naissance du projectif* (C.C. Gillispie [1994] y renvoie sous cette référence, dans sa préface à la réédition de la biographie classique de Carnot [Reinhard 1951–1952, p. III]). Cependant, comme ce recueil ne put finalement voir le jour, son éditeur a accepté que je le soumette à la *Revue d'histoire des mathématiques*. Je tiens à remercier C. Gilain, ainsi que les deux recenseurs anonymes, pour avoir contribué, par leurs remarques, à l'améliorer notablement.

constitue la puissance de l'algèbre et déterminer les modifications à apporter à la géométrie pour permettre à celle-ci de se hisser à la hauteur de sa rivale[1]. Or, parmi les propriétés qui semblent jusqu'alors l'apanage de l'algèbre et qui conditionnent son efficacité, sa capacité à la généralité apparaît comme l'une des plus importantes; peut-être même la plus importante, si l'on en juge par la fréquence avec laquelle ce thème revient dans l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* que Chasles publie en 1837. En conséquence, se pose à ces mathématiciens la question de savoir comment introduire du général dans une géométrie qui semblait peu auparavant vouée à ne considérer que du particulier. Plusieurs pistes furent explorées, dont nous voudrions montrer ici, en suivant plus particulièrement divers traitements du théorème dit de Menelaus, comment certaines trouvèrent leur origine dans les travaux que Lazare Carnot consacra à la géométrie entre 1800 et 1806 [Carnot 1800, 1801, 1803, 1806][2].

---

[1] [Poncelet 1822, p. XIX–XX, XXVI–XXVII]; [Chasles 1837, *passim*, par exemple p. 2]. [Belhoste 1998, p. 17–23] examine le traitement que les premiers travaux de Poncelet réservent, dans la tradition de Monge, à cette valeur qu'est la généralité.

[2] Dans un premier article [Chemla 1990], nous avons mis en évidence le processus d'émergence de la théorie des transversales dont ces travaux témoignent. Nous reprenons ici les mêmes textes sous un angle différent. Afin de fournir un socle à notre discussion, sinon probablement trop abstraite, nous rappellerons certains aspects fondamentaux de la géométrie de Carnot déjà exposés dans le précédent article. Si nous nous restreignons à l'œuvre de Carnot pour proposer une réflexion sur la question de la généralité en géométrie, laquelle s'inspire de la lecture qu'en ont donnée des mathématiciens comme Poncelet et Chasles, cela ne signifie nullement que nous opposerions sur ce point cet auteur à ses contemporains. Poncelet comme Chasles reconnaissent également chez Monge, par exemple, des idées qui trouveront leurs prolongements dans d'autres procédés introduisant de la généralité en géométrie. Les travaux de Carnot nous ont cependant paru ne pas avoir reçu l'attention que leur influence manifeste sur les contemporains appelait, alors même que des géomètres appelés à fonder la géométrie projective y perçurent les débuts de développements importants sur cette question, cruciale pour eux, de la généralité. C'est la raison pour laquelle nous nous concentrerons ici sur leur examen, nous réservant de revenir dans des publications ultérieures sur la question de la généralité en géométrie. Pour ce qui est de la biographie de Carnot ou de ses contributions à de multiples disciplines, on peut se reporter aux travaux de Gillispie [1971, 1979], ainsi qu'aux ouvrages de J.-P. Charnay [1984–5, 1990]. Outre la biographie de Reinhard [1951–1952], réimprimée récemment, le lecteur peut désormais consulter [Dhombres Jean et Nicole 1997].

1. LE PORTRAIT DE L'ANALYSE DANS SA "RIVALITÉ" AVEC LA GÉOMÉTRIE

Tout au long du XVIII^e^ siècle, les recherches en géométrie sont dominées par l'application à cette discipline des techniques de l'algèbre ou du calcul infinitésimal. Cependant l'expression de « géométrie analytique », introduite en 1797 par Lacroix pour désigner la branche des mathématiques qui se constitue en conséquence de ces travaux[3], ne renvoie pas seulement au fait d'y utiliser pour principal outil les transformations algébriques ou analytiques. Elle fait surtout écho à une manière « analytique » de traiter les domaines mathématiques, en un sens devenu classique à la fin du siècle. Lacroix définit ainsi cette manière de faire, dont les opérations algébriques et analytiques ont permis la mise en œuvre :

«*En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au lecteur qu'il existait une manière d'envisager la géométrie, qu'on pourrait appeler* Géométrie analytique*, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa mécanique à l'égard des principes de l'équilibre et du mouvement…* » [Lacroix 1797–98, t. 1, p. XXV][4].

On le voit, les méthodes analytiques ne sont plus seulement données pour efficaces dans la résolution de problèmes donnés, si généraux fussent-ils. Elles sont mises au service d'une organisation architectonique du savoir qui oppose des principes aux vérités qu'ils contiennent et que les transformations révèlent. Ainsi la géométrie ne sera plus constituée d'une « foule de vérités particulières »[5], paraissant sans lien les unes avec les autres. L'outil analytique les articule et en permet une présentation raisonnée[6]. Lagrange reprend à son compte l'énoncé de ce programme :

«*dans l'Analyse, la perfection consiste à n'employer que le moindre*

[3] [Taton 1964] décrit le développement de cette discipline.

[4] L'œuvre scientifique d'Euler, par exemple, jalonne le XVIII^e^ siècle de semblables traitements de nombreux domaines des mathématiques.

[5] L'expression est de Poncelet, voir ci-dessous et voir également [Chasles 1837, p. 253]. On trouve encore un écho de l'état d'inconfort que ressentent les mathématiciens de cette époque face à cette augmentation désordonnée de connaissances dans [Gergonne 1827].

[6] Ce programme rencontre les idées des enseignements révolutionnaires qui mettent à profit les présentations analytiques pour amener tout un chacun, une fois quelques

nombre possible de principes, et à faire sortir de ces principes toutes les vérités qu'ils peuvent renfermer, par la seule force de l'Analyse» [Lagrange 1798–99, p. 342][7].

Alors que s'affirme et se généralise ce mode de traitement de la géométrie, Monge, par ailleurs, rend public, à l'occasion de ses cours à l'École Normale de l'an III, un corps de doctrine qui fournit un cadre théorique commun à l'ensemble des opérations graphiques utilisées à l'époque dans nombre de domaines techniques[8]. C'est ainsi que se constitue la *Géométrie descriptive*, dont on sait à quel point elle inspirera les géomètres postérieurs, parmi lesquels Poncelet et Chasles, dans leurs efforts pour renouveler la « géométrie pure »[9]. Nous retiendrons ici qu'au sein même de cette œuvre qui marque la reprise des travaux purement géométriques, figure le thème de la comparaison entre méthodes analytiques et géométriques[10]. Ainsi, dès les premières pages, après avoir développé une comparaison entre la résolution de problèmes selon les deux méthodes, Monge conclut par l'affirmation, souvent citée depuis lors :

«*Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la géométrie descriptive à l'algèbre ; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse ; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie.*

Il seroit à désirer que les deux sciences fussent cultivées ensemble : la géométrie descriptive porteroit dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère, et, à son tour, l'analyse

---

principes et une méthode admis, au savoir. Voir en particulier les cours à l'École normale de l'an III in [Dhombres 1992], où le lecteur trouvera matière à situer ces approches analytiques dans leur contexte.

[7] Ce texte présente l'ensemble de la trigonométrie sphérique selon ces préceptes, reproduisant pour ce domaine l'approche adoptée par Lagrange en mécanique, comme Lacroix nous le rappelle ci-dessus ; on peut à ce sujet consulter [Chemla, Pahaut, 1988].

[8] On peut sur ce point consulter le travail de J. Sakarovitch [1989], récemment publié [Sakarovitch 1998]. L'ouvrage de R. Taton [1951a] donne une vue d'ensemble sur l'œuvre scientifique de Monge.

[9] On trouve dans [Poncelet 1822] et [Chasles 1837] de nombreuses références à ce fait.

[10] Nous renvoyons à R. Taton [1951, surtout p. 85], à [Sakarovitch 1989, p. 173–5], repris dans [Sakarovitch 1998, p. 214–215, 259–261], et à [Belhoste, Taton 1992, p. 283, 294–301].

porteroit dans la géométrie la généralité qui lui est propre» [Monge 1799, p. 16][11].

C'est donc un enrichissement mutuel des deux méthodes que Monge attend de leur confrontation, appelant de ce fait au développement de la géométrie. L'intervention de Carnot influe dans le même sens, mais elle procède d'une évaluation critique de l'analyse qui amènera son auteur à l'élaboration d'un dispositif, sur lequel nous reviendrons ci-dessous. De fait, Carnot s'appuie sur une conception originale de l'opposition entre analyse et synthèse[12]. Selon lui, elles se distinguent l'une de l'autre par le fait que, dans la synthèse, «*on ne peut jamais raisonner que sur des objets réels et effectifs*», tandis que dans l'analyse,

«*on admet des objets qui n'existent pas ; on les représente par des hiéroglyphes aussi bien que ce qui est effectif. On mélange les êtres réels avec les êtres de raison ; puis par des transformations méthodiques, on parvient à éliminer ou chasser ces derniers du calcul : alors ce qu'il y avoit d'inintelligible dans les formules disparoît ; il reste ce qu'une synthèse subtile auroit sans doute pu faire découvrir. Mais ce résultat, on l'a souvent obtenu par une voie plus courte, plus facile, et presque par pur mécanisme, lorsqu'il auroit fallu des efforts prodigieux pour y parvenir autrement. Tel est l'avantage de l'analyse, et par conséquent celui des modernes sur les anciens*»[13] [Carnot 1801, p. 143–4].

Si les bénéfices de l'analyse sont manifestes, ils nécessitent de recourir à des « êtres de raison », telles les quantités positives et négatives,

---

[11] Monge reprend ce thème, voir par exemple [Monge 1799, p. 62], pour inciter les élèves à pratiquer cette correspondance. Et on le retrouvera, évoqué de manière différente, dans le traité de Lacroix : « *Je ne voudrais pas qu'on mêlât, comme on le fait dans presque tous les ouvrages, les considérations géométriques avec les calculs algébriques ; il serait mieux, ce me semble, que chacun de ces moyens fût porté dans des traités séparés, aussi loin qu'il peut aller et que les résultats de l'un et de l'autre s'éclairassent mutuellement en se correspondant pour ainsi dire, comme le texte d'un livre et sa traduction*» [Lacroix 1797–98, p. XXVI].

[12] Les pages où Poncelet [1822, p. XX–XXII par exemple] confronte leurs mérites respectifs témoignent d'une conception apparentée de l'analyse et de la synthèse, qu'il donne pour synonyme usuel de « géométrie élémentaire ». Le vocabulaire qu'il emploie dans ce texte évoque régulièrement la terminologie de Carnot que nous introduirons ci-dessous : « système », « implicite », « primitif », etc.

[13] Carnot expose cette critique dans une longue note, et la précisera dans ses écrits ultérieurs. Carnot [1801, p. 29 *sq.*] développe l'analogie entre cette conception dans le domaine de la géométrie et son diagnostic relatif à la validité de l'analyse infinitésimale.