Astérisque

MICHEL LAURENT

Sur quelques résultats récents de transcendance

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 209-230

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__209_0>

SUR QUELQUES RESULTATS RECENTS DE TRANSCENDANCE

par

Michel LAURENT

1. Introduction

Cet exposé vise un double objectif : présenter en premier lieu les principaux développements de la théorie des nombres transcendants grâce à une série d'exemples concrets et, d'autre part, illustrer une nouvelle méthode de transcendance en redémontrant de façon détaillée un résultat classique, à savoir le théorème des six exponentielles. Il est devenu maintenant habituel de formuler les résultats de transcendance en termes de groupes algébriques. Nous n'avons ici suivi ce point de vue que partiellement, nous étant surtout attaché à décrire les résultats concernant la fonction exponentielle usuelle. Aussi, commencerons nous par rappeler l'énoncé de la célèbre conjecture de SCHANUEL, qui est censé contenir tout ce qui est connu sur la transcendance de valeurs de la fonction exponentielle.

CONJECTURE : *Désignons par $x_1, \dots, x_n$, soit des nombres complexes, soit des éléments de $\mathbf{C}_p$ situés dans le disque de convergence de l'exponentielle p-adique. On suppose que les nombres $x_1, \dots, x_n$ sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants. Alors le degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$ du corps*

$$\mathbf{Q}\,(x_1, \dots, x_n, e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$$

est $\geq n$.

Il s'ensuit en particulier que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ désignent des nombres algébriques non nuls et multiplicativement indépendants, les n nombres $x_i = \log \alpha_i, 1 \leq i \leq n$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Nous avons fait jouer au théorème des six exponentielles un rôle privilégié, l'utilisant comme fil conducteur entre les §.2, 3, 4 et 6. Le plan de l'article est le suivant. On étudie dans le §.2 le rang de matrices dont les coefficients sont des logarithmes de nombres algébriques, et on applique les résultats obtenus à la conjecture de LEOPOLDT. Le §.3 est consacré à l'indépendance algébrique ; on y examine notamment les différents outils de nature algébrique qui ont été élaborés pour la circonstance. Dans les démonstrations modernes de transcendance, les lemmes de zéros jouent un rôle fondamental. Nous indiquons dans le §.4 l'énoncé le plus général actuellement connu en termes de groupes algébriques. Cet énoncé présente une grande analogie formelle avec une conjecture de géométrie diophantienne, due à S. LANG. On examine dans le §.5 les diverses contributions récentes à cette conjecture, ainsi que leurs relations avec certains résultats de transcendance et d'approximation diophantienne. Le §.6 est enfin consacré à la nouvelle preuve déjà mentionnée du théorème des six exponentielles.

2.1 Rang de matrices à coefficients logarithmiques

On se propose de minorer (ou si l'on est plus ambitieux de déterminer exactement) le rang sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{C}_p$, de matrices de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \log \alpha_{11} & ,\ldots, & \log \alpha_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \log \alpha_{d1} & ,\ldots, & \log \alpha_{d\ell} \end{bmatrix}$$

où les $\alpha_{ij}, 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq \ell$, désignent des nombres algébriques non nuls. Comme exemple de résultats de ce type, citons le

THÉORÈME DES SIX EXPONENTIELLES : *Il s'agit du cas particulier $d = 2$, $\ell = 3$. On suppose que les deux lignes et les trois colonnes de A sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Le rang de A est alors égal à deux.*

Signalons en passant la conjecture des quatre exponentielles, qui propose d'établir l'énoncé analogue obtenu avec $d = \ell = 2$. Dans le cas général, on dispose de minorations du rang de la matrice A sous des hypothèses du même type. D'une manière plus précise, les énoncés actuels prennent en compte les éventuelles relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre les lignes de combinaisons $\mathbb{Q}$-linéaires de colonnes de A, relations qui ont évidemment pour effet de diminuer le rang d'une telle matrice. Il faut cependant noter que des hypothèses de cette nature, comme celles du théorème ci-dessous, sont insuffisantes pour décrire complètement le rang de la matrice A, voir [32].

Considérons le rang de A comme celui de ses vecteurs colonnes y_j, $1 \leq j \leq \ell$, et désignons par

$$Y = \mathbb{Z}\, y_1 + \cdots + \mathbb{Z}\, y_\ell$$

le sous-groupe engendré dans $\mathbb{C}^d$ ou $\mathbb{C}_p^d$. L'énoncé suivant, dont la formulation m'a été indiquée par M. EMSALEM, se déduit du théorème 4.1 de [34]. D'un point de vue technique, on notera que les deux conditions de maximalité considérées ici impliquent la maximalité du coefficient $\mu^\sharp$ introduit dans [34].

THÉORÈME 1 : *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{C}_p^d$) contenant Y et soit W un sous-espace vectoriel de V. Supposons que W soit rationnel sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (i.e. engendré par des points à coordonnées algébriques) et que l'on ait :*

$$\max_T \left[\frac{rg(Y \cap T)}{\dim T}\right] = \frac{rgY}{d} ,$$

$$\max_T \left[\frac{\dim(W \cap T)}{\dim T}\right] = \frac{\dim W}{d} ,$$

où T décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels $\mathbb{Q}$-rationnels non nuls de $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{C}_p^d$). Alors

$$\dim V \geq \frac{d(rgY + \dim W)}{(rgY + d)} .$$

Lorsque $W = \{0\}$, on peut choisir pour V le $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}_p$)-espace vectoriel engendré par Y, et l'on obtient ainsi une minoration du rang A qui implique en particulier le théorème des six exponentielles.

A l'opposé, lorsque le sous-espace V est rationnel sur $\overline{\mathbb{Q}}$, le choix $W = V$ amène au célèbre résultat de A. BAKER : des logarithmes de nombres algébriques sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$, si et seulement si ils le sont sur $\mathbb{Q}$.

2.2. Application à la conjecture de Leopoldt

Soit K un corps de nombres et soit p un nombre entier. La conjecture de LEOPOLDT affirme que le rang sur $\mathbb{Z}_p$ de l'adhérence p-adique du groupe des unités principales de K est égal au rang sur $\mathbb{Z}$ dudit groupe ; et cette assertion se ramène aisément au calcul du rang d'une matrice du type envisagé précédemment (voir par exemple le §.2 de [21]). Lorsque le corps K est galoisien sur $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois G, on dispose de plus d'une action de G sur l'adhérence p-adique, et l'utilisation de certains sous-espaces $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnels W permet d'isoler les diverses composantes isotypiques associées à cette action. On trouvera dans [20] une interprétation de cette construction en termes de tores. De façon précise, il est possible d'établir le résultat suivant.

Pour tout caractère absolument irréductible φ du groupe G, désignons par $d_\varphi = \varphi(1)$ le degré de la représentation linéaire ρ associée, et notons $r_\varphi = (\varphi(1) + \varphi(c))/2$ la multiplicité de la valeur propre $+1$ dans la matrice $\rho(c)$ représentant une conjugaison complexe $c \in G$ du corps K. On a alors le

THÉORÈME 2 (Cor.2 du th.1 de [21]) : *Supposons que pour tout caractère absolument irréductible φ du groupe G, on ait l'inégalité*

$$r_\varphi(r_\varphi - 1) < d_\varphi \ .$$

Alors le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt pour tout nombre premier p.

On dispose ainsi de conditions suffisantes qui sont très faciles à tester dès lors que l'on connait la table des caractères du groupe G. Les inégalités ci-dessus sont notamment vérifiées lorsque le groupe G est abélien, auquel cas on retrouve le théorème de BRUMER sur les corps abéliens [5], ainsi que pour certains groupes résolubles G, comme le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$, ou bien le groupe $GL_2(\mathbf{F}_3) = \widetilde{\mathfrak{S}}_4$, avec des valeurs convenablement choisies de la conjugaison complexe c. On trouvera d'autres exemples dans [21].

3.1. Indépendance algébrique de valeurs de la fonction exponentielle

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres complexes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants, et soient $y_1, \ldots, y_n$ des nombres complexes qui sont eux aussi $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants. On désigne par t_1, t_2, t_3 les degrés de transcendance sur $\mathbf{Q}$ des corps

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}\ (e^{x_i y_j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\ ,\\ &\mathbf{Q}\ (x_i, e^{x_i y_j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\ ,\\ &\mathbf{Q}\ (x_i, y_j, e^{x_i y_j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\ . \end{aligned}$$

Plusieurs résultats classiques de transcendance se ramènent à des minorations des t_k, $1 \le k \le 3$. On vérifiera par exemple dans le §.6 que le théorème des six exponentielles équivaut à la minoration $t_1 \ge 1$ lorsque $m = 2$, $n = 3$, et que le théorème bien connu de GEL'FOND-SCHNEIDER sur la transcendance de a^b équivaut quant à lui à $t_2 \ge 1$, pour $m = 2$, $n = 1$. Un grand nombre de travaux (voir la bibliographie de [33]) ont donc été consacrés à ce problème, et le résultat suivant, extrait de [9], peut être considéré comme optimal au vu des méthodes utilisées. On notera aussi que l'on peut étendre cet énoncé au cas de vecteurs x_i et y_j de $\mathbf{C}^r$, $r \ge 1$, voir le §.12 de [35].