RAPHAËL KRIKORIAN

Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts

Astérisque, tome 259 (1999)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1999__259__R1_0>

ASTÉRISQUE 259

RÉDUCTIBILITÉ DES SYSTÈMES PRODUITS-CROISÉS À VALEURS DANS DES GROUPES COMPACTS

Raphaël Krikorian

Société Mathématique de France 1999

Raphaël Krikorian
Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, U.M.R. 7640 du CNRS, 91128 Palaiseau
et
École Nationale Supérieure de Technique Avancée UMA-LMA, 32, Bd Victor, 75015 Paris.
E-mail : `krikor@math.polytechnique.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 34C35, 58 Fxx.

***Mots clefs*.** — Systèmes produits-croisés, solutions de Floquet, petits diviseurs, méthode KAM, méthode d'Eliasson, quasi-périodicité, transversalité à la Pyartli.

RÉDUCTIBILITÉ DES SYSTÈMES PRODUITS-CROISÉS À VALEURS DANS DES GROUPES COMPACTS

Raphaël Krikorian

Résumé. — Nous étudions dans cet ouvrage le problème de la conjugaison à des constantes (réductibilité) des systèmes produits-croisés quasi-périodiques à valeurs dans des groupes compacts semi-simples, de même que celui de l'existence de solutions de type Floquet pour des systèmes d'équations différentielles linéaires quasi-périodiques à valeurs dans des algèbres compactes semi-simples.

Le résultat principal du livre (chapitre 6) est que, pour des familles de systèmes quasi-périodiques à un paramètre réel à valeurs dans le groupe des rotations de l'espace (de dimension 3), la réductibilité a lieu pour presque toute valeur du paramètre (pourvu que la famille soit suffisamment proche d'une famille de systèmes constants). Pour sa démonstration, qui repose sur une technique d'élimination des résonances due à L.H. Eliasson, nous introduisons une notion de transversalité à la Pyartli, ce qui nous permet de contrôler la dépendance des valeurs propres en fonction du paramètre. Nous faisons également usage d'un théorème de réductibilité pour un ensemble de paramètres de mesure positive, montré dans le cas des groupes compacts semi-simples au chapitre 3. Nous montrons également au chapitre 5, toujours dans le cas des groupes compacts semi-simples, que modulo un revêtement qui ne dépend que du groupe, l'ensemble des systèmes réductibles est dense au voisinage des constantes. Le chapitre 4 du livre établit un théorème de forme normale qui permet de retrouver le résultat en mesure positive du chapitre 3. Enfin nous donnons au chapitre 2 une condition nécessaire et suffisante (modulo un revêtement fini) de réductibilité des systèmes produits-croisés et faisons l'étude du centralisateur des systèmes constants.

***Abstract* (Reducibility of skew-product systems with values in compact groups)**

In this book we study the problem of reducibility (conjugacy to constants) of quasi-periodic skew-product systems with values in compact semisimple groups, as well as the existence of Floquet type solutions for linear differential quasi-periodic systems with values in compact semisimple algebras.

The main result (chapter 6) is that for real one parameter families of quasi-periodic systems with values in the group of rotations of the 3-space, reducibility holds for almost all value of the parameter (provided the family is close enough to some family of constant systems). For the proof of this result, which relies on a resonance removing procedure due to L.H. Eliasson, we introduce a notion of transversality *à la* Pyartli,

which enables us to keep on controlling the dependance of the eigenvalues on the parameter. We also use a positive measure reducibility theorem proven, in case the group is compact semisimple, in chapter 3. We also prove in chapter 5, again in the compact semisimple group case, that modulo some finite covering which depends only on the group, the set of reducible systems is dense near the constants. Chapter 4 is devoted to a normal form type theorem which enables us to recover the result of chapter 3. Finally, we give in chapter 2 a necessary and sufficient condition (modulo a finite covering) for reducibility of skew-product systems and study the centralizer of constant systems.

Table des matières

INTRODUCTION

L'étude de l'équation de Hill à coefficient quasi-périodique (*cf.* [**23**], [**4**] pour plus de détails)

$$-y'' + q(t)y = \lambda y, \tag{1}$$

avec $q(t) = Q(t\omega/2\pi)$, où Q est $\mathbf{Z}^d$-périodique et $\omega \in \mathbf{R}^d$, a intéressé de nombreux auteurs comme en particulier Dinaburg-Sinaï [**7**], Moser-Pöschel [**21**], Herman [**15**], Eliasson [**9**], [**10**], dont la motivation était de décrire le spectre de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel à potentiel quasi-périodique, ceci en tentant de généraliser au cas quasi-périodique la théorie de Floquet. Bien que l'apparition de phénomènes de petits diviseurs, désormais classique en théorie des systèmes dynamiques, interdise une transcription mot à mot du théorème de Floquet et complique considérablement les démonstrations, cette tentative, dans laquelle les travaux des auteurs précédemment cités ainsi que la connaissance accumulée depuis H. Weyl sur les propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger ont joué un rôle important, a finalement abouti (au moins dans un cadre perturbatif) dans le travail de L.H. Eliasson [**9**]. L'énoncé de ce théorème est que si ω vérifie une condition diophantienne, aux grandes énergies le spectre de l'équation (1) est absolument continu. L'utilisation de techniques à la K.A.M (Kolmogorov-Arnold-Moser), l'introduction d'un *nombre de rotation* associé à l'équation (1) ainsi que l'interprétation spectrale du problème considéré sont les ingrédients de [**9**]. On peut réinterpréter (1) comme une équation différentielle linéaire sur $(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d) \times \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned} X'(\theta) &= U_\lambda(\theta) \cdot X(\theta) \\ \theta' &= \omega/2\pi, \end{aligned} \tag{2}$$

avec

$$U_\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(\theta) - \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

où $\omega \in \mathbf{R}^d$ est le vecteur des fréquences des coefficients et $X(t) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Ainsi U_λ est à valeurs dans l'algèbre de Lie $sl(2,\mathbf{R})$. Il s'agit alors d'obtenir des représentations de Floquet $X(t) = B(t\omega/2\pi + \theta_0) \cdot e^{U_0 t} \cdot X_0$ de *toutes* les solutions de (2) (B étant $\mathbf{Z}^d$-périodique). Quand c'est le cas le système est dit *réductible*. Le théorème d'Eliasson se traduit dans ce contexte en disant que si ω vérifie une condition diophantienne et si Q est suffisamment petit, alors pour presque toute valeur de λ, U_λ est réductible modulo une conjugaison B qui est $2\mathbf{Z}^d$-périodique.

Il est alors naturel de se demander si le résultat précédent admet des analogues quand on remplace le groupe $SL(2,\mathbf{R})$ par un autre groupe de Lie G (par exemple semi-simple). Une des difficultés étant que des problèmes liés aux petits diviseurs apparaissent déjà quand on étudie le groupe compact maximal, il est naturel de commencer par l'étude du cas où G lui-même est compact : ceci constitue le propos du présent ouvrage. Nous essaierons de répondre en particulier aux questions de « densité » (topologique ou métrique) des systèmes réductibles aux voisinages des constantes. Comme ce type de problèmes est lié à l'étude de systèmes produits croisés, nous définissons ces derniers dans la suite.

Nous noterons $\mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ le tore d-dimensionnel et G un groupe de Lie (réel) qui sera souvent un groupe de matrices. Le groupe des difféomorphismes de classe C^s ($s \in \mathbf{N} \cup \{\omega, \infty\}$ où ω signifie dans ce contexte « analytique réel ») de $\mathbf{T}^d \times G$ sera noté $\mathrm{Diff}^s(\mathbf{T}^d \times G)$.

Si $f \in C^\infty(\mathbf{T}^d, \mathbf{R}^k)$ nous notons

$$|f|_s = \max_{|\beta| \le s} \max_{\theta \in \mathbf{T}^d} |\partial^\beta f(\theta)|,$$

les normes C^s.

Si f est analytique et $h > 0$, nous noterons (quand ceci a un sens),

$$|f|_h = \sup_{z \in B_h} |\widetilde{f}(z)|,$$

où $\widetilde{f}$ est le prolongement holomorphe de f à la bande complexe $B_h = \mathbf{R}^d \oplus \sqrt{-1}[-h,h]^d$. Nous serons particulièrement intéressés dans la suite par le sous-groupe

$$SW^s(\mathbf{T}^d, G) \subset \mathrm{Diff}^s(\mathbf{T}^d \times G)$$

constitué des difféomorphismes de $\mathbf{T}^d \times G$ de la forme

$$(\theta, y) \longmapsto (\theta + \alpha, A(\theta) \cdot y)$$

où $\alpha \in \mathbf{T}^d$ et $A \in C^s(\mathbf{T}^d, G)$. Un tel difféomorphisme, que nous noterons (α, A), sera dit produit croisé (en anglais *skew-product*). Ce sont en fait des cocycles sur $\mathbf{T}^d \times G$. Si $\alpha \in \mathbf{T}^d$ est fixé, l'ensemble $\{(\alpha, A),\ A \in C^s(\mathbf{T}^d, G)\}$ sera noté $SW^s_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$.

Remarquons que si A est une constante le difféomorphisme (α, A) est simplement la translation à gauche sur le groupe de Lie $\mathbf{T}^d \times G$.

L'itéré n-ième d'un élément $(\alpha, A) \in SW^s(\mathbf{T}^d, G)$ s'écrit :

$$(\alpha, A)^n(\theta, y) = (\theta + n\alpha, A(\theta + (n-1)\alpha) \cdots A(\theta) \cdot y),$$

ce qui montre que la compréhension de la dynamique du difféomorphisme (α, A) est équivalente à celle des produits $A(\theta + (n-1)\alpha) \cdots A(\theta)$ qui dans le cas où G est un groupe de matrices et α est minimal (*i.e.* $x \mapsto x + \alpha$ a toutes ses orbites denses sur $\mathbf{T}^d$) sont des *produits quasi-périodiques de matrices.*

Afin d'étudier ces derniers, introduisons enfin une notion de conjugaison fibrée : soient $\alpha \in \mathbf{T}^d$ et $A_1, A_2 \in C^s(\mathbf{T}^d, G)$, on dira que $B \in C^s(\mathbf{T}^d, G)$ conjugue A_1 à A_2 si le difféomorphisme associé $(0, B) \in SW^s(\mathbf{T}^d, G)$ conjugue (α, A_1) à (α, A_2) (qui sont tous deux dans $SW^s_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$), c'est-à-dire si l'on a $(0, B) \circ (\alpha, A_1) \circ (0, B)^{-1} = (\alpha, A_2)$, ce qui peut se récrire

$$A_2(\theta) = B(\theta + \alpha) A_1(\theta) B(\theta)^{-1}, \ \forall \theta \in \mathbf{T}^d.$$

L'objet du présent ouvrage est l'étude des classes de conjugaisons fibrées des groupes $SW^s_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$ dans le cas où G est un groupe compact semi-simple et α est minimal. Une classe de conjugaison particulierement intéressante est celle des systèmes (α, A_0) où A_0 est une constante ; les difféomorphismes de cette classe de conjugaison seront dits *réductibles.* La dynamique d'un (α, A) réductible, donc de la forme $(0, B) \circ (\alpha, A_0) \circ (0, B)^{-1} = (\alpha, B(\cdot + \alpha) A_0 B(\cdot)^{-1})$ est alors très simple puisque dans ce cas les $(\alpha, A)^n$ s'écrivent

$$(\alpha, A)^n = (n\alpha, B(\cdot + n\alpha) A_0^n B(\cdot)^{-1}),$$

et pour des A_0 génériques les orbites sont difféomorphes au tore $\mathbf{T}^d \times T_{\max}$ où $T_{\max}$ est le (puisque A_0 est générique) tore maximal passant par A_0.

Les difféomorphismes produits croisés interviennent également de façon naturelle dans l'étude des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont quasi-périodiques et à valeurs dans l'algèbre g d'un groupe de Lie G. Rappelons quelques définitions : une fonction $f \in C^s(\mathbf{R}, G)$ est *quasi-périodique* de vecteurs de fréquence $(\omega_1/2\pi, \ldots, \omega_d/2\pi) \in \mathbf{R}^d$, s'il existe $F \in C^s(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G)$ telle que $f(t) = F(t\omega_1/2\pi, \ldots, t\omega_d/2\pi)$. Le $\mathbf{Z}$-module engendré par $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ s'appelle le *module des fréquences.*

Les équations que nous considérons sont donc de la forme

$$X'(t) = u(t) X(t),$$

où u s'écrit sous la forme $u(t) = U(t\omega_1/2\pi, \ldots, t\omega_d/2\pi)$, avec $U \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ (g étant l'algèbre du groupe G). Il est équivalent d'étudier le flot suivant sur $\mathbf{T}^d \times G$,

$$\begin{aligned} X'(\theta) &= U(\theta) \cdot X(\theta) \\ \theta' &= \omega/2\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Le cas qui nous intéresse est celui où l'on peut ramener l'étude du système (3) à celui d'un système à coefficients constants c'est-à-dire avec $U = U_0 \equiv$ constante, au moyen