

Revue d'Histoire des Mathématiques



*La controverse de 1874 entre
Camille Jordan et Leopold Kronecker*

Frédéric Brechenmacher

Tome 13 Fascicule 2

2 0 0 7

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédactrice en chef :

Jeanne Peiffer

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Michel Armatte

Liliane Beaulieu

Bruno Belhoste

Alain Bernard

Jean Celeyrette

Olivier Darrigol

Anne-Marie Décaillot

Marie-José Durand-Richard

Étienne Ghys

Christian Gilain

Jens Hoyrup

Agathe Keller

Karen Parshall

Dominique Tournès

Secrétariat :

Nathalie Christiaën

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05

Tél. : (33) 01 44 27 67 99

Fax : (33) 01 40 46 90 96

Mél : revues@smf.ens.fr

Url : <http://smf.emath.fr/>

Directeur de la publication :

Stéphane Jaffard

COMITÉ DE LECTURE

P. Abgrall France

T. Archibald Canada

J. Barrow-Greene Grande-Bretagne

U. Bottazzini Italie

J.-P. Bourguignon France

A. Brigaglia Italie

B. Bru France

P. Cartier France

J.-L. Chabert France

F. Charette France

K. Chemla France

P. Crépel France

F. De Gandt France

S. Demidov Russie

M. Eppe Allemagne

N. Ermolaëva Russie

H. Gispert France

C. Goldstein France

J. Gray Grande-Bretagne

E. Knobloch Allemagne

T. Lévy France

J. Lützen Danemark

A. Malet Catalogne

I. Pantin France

I. Passeron France

D. Rowe Allemagne

C. Sasaki Japon

K. Saito Japon

S.R. Sarma Inde

N. Schappacher Allemagne

E. Scholz Allemagne

S. Stigler États-Unis

B. Vitrac France

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2007 : prix public Europe : 65 €; prix public hors Europe : 74 €;
prix au numéro : 36 €.

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, B.P. 67, 13274 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

LA CONTROVERSE DE 1874 ENTRE CAMILLE JORDAN ET LEOPOLD KRONECKER

FRÉDÉRIC BRECHENMACHER

RÉSUMÉ. — Une vive querelle oppose en 1874 Camille Jordan et Leopold Kronecker sur l'organisation de la théorie des formes bilinéaires, considérée comme permettant un traitement « général » et « homogène » de nombreuses questions développées dans des cadres théoriques variés au XIX^e siècle et dont le problème principal est reconnu comme susceptible d'être résolu par deux théorèmes énoncés indépendamment par Jordan et Weierstrass. Cette controverse, suscitée par la rencontre de deux théorèmes que nous considérerions aujourd'hui équivalents, nous permettra de questionner l'identité algébrique de pratiques polynomiales de manipulation de « formes » mises en œuvre sur une période antérieure aux approches structurales de l'algèbre linéaire qui donneront à ces pratiques l'identité de méthodes de caractérisation des classes de similitudes de matrices. Nous montrerons que les pratiques de réductions canoniques et de calculs d'invariants opposées par Jordan et

Texte reçu le 7 juillet 2006, révisé le 26 octobre 2007.

F. BRECHENMACHER, Laboratoire de Mathématiques Lens (LML, EA2462). Fédération de Recherche Mathématique du Nord-Pas-de-Calais (CNRS, FR 2956). Université d'Artois (IUFM du Nord Pas de Calais). Faculté des Sciences Jean Perrin, rue Jean Souvraz S.P. 18, 62 307 Lens Cedex France.

Courrier électronique : frederic.brechenmacher@euler.univ-artois.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A85, 11-03, 11C20, 11E04, 11E39, 15-03, 15A15, 15A18, 15A21, 15A22, 15A36, 15A63, 15A90, 20-03, 20G15, 34-03, 34A05, 70-03.

Mots clefs : Pratiques algébriques. Généralité. Jordan. Kronecker. Weierstrass. Formes canoniques. Invariants. Diviseurs élémentaires. Facteurs invariants. Substitutions linéaires. Formes bilinéaires. Matrices. Théorie spectrale. Algèbre linéaire. Algèbre. Arithmétique. Mécanique.

Key words and phrases. — Algebraic practices. Generality. Jordan. Kronecker. Weierstrass. Canonical forms. Invariants; Elementary divisors. Invariant factors. Linear substitutions. Bilinear forms. Matrices. Spectral theory. Linear algebra. Algebra. Arithmetic. Mechanics.

Kronecker manifestent des identités multiples indissociables d'un contexte social daté et qui dévoilent des savoirs tacites, des modes de pensées locaux mais aussi, au travers de regards portés sur une histoire à long terme impliquant des travaux d'auteurs comme Lagrange, Laplace, Cauchy ou Hermite, deux philosophies internes sur la signification de la généralité indissociables d'idéaux disciplinaires opposant algèbre et arithmétique. En questionnant les identités culturelles de telles pratiques, cet article vise à enrichir l'histoire de l'algèbre linéaire, souvent abordée dans le cadre de problématiques liées à l'émergence de structures et par l'intermédiaire de l'histoire d'une théorie, d'une notion ou d'un mode de raisonnement.

ABSTRACT (The 1874 Controversy between Camille Jordan and Leopold Kronecker)

During the whole of 1874, Camille Jordan and Leopold Kronecker quarrelled vigorously over the organisation of the theory of bilinear forms. That theory promised a "general" and "homogeneous" treatment of numerous questions arising in various 19th-century theoretical contexts, and it hinged on two theorems, stated independently by Jordan and Weierstrass, that would today be considered equivalent. It was, however, the perceived difference between those two theorems that sparked the 1874 controversy. Focusing on this quarrel allows us to explore the algebraic identity of the polynomial practices of the manipulations of forms in use before the advent of structural approaches to linear algebra. The latter approaches identified these practices with methods for the classification of similar matrices. We show that the practices—Jordan's canonical reduction and Kronecker's invariant computation—reflect identities inseparable from the social context of the time. Moreover, these practices reveal not only tacit knowledge, local ways of thinking, but also—in light of a long history tracing back to the work of Lagrange, Laplace, Cauchy, and Hermite—two internal philosophies regarding the significance of generality which are inseparable from two disciplinary ideals opposing algebra and arithmetic. By interrogating the cultural identities of such practices, this study aims at a deeper understanding of the history of linear algebra without focusing on issues related to the origins of theories or structures.

Trois étapes permettent de décrire l'évolution de la controverse qui oppose, en 1874, Camille Jordan et Leopold Kronecker. Deux communications successives adressées aux académies de Paris et de Berlin marquent l'origine d'une querelle de priorité qui suscite, dans la sphère privée, un échange épistolaire durant l'hiver 1874 puis, au printemps de cette même année, une série de notes et mémoires qui sont autant d'attaques et contre attaques au sein de ce que Jordan désigne comme la « scène publique ». En suivant cette évolution chronologique, détaillée en annexe 1 et qui nous amènera à remonter dans le temps lorsque Jordan et Kronecker mobiliseront des références à des textes anciens, nous verrons que la question de priorité posée par la querelle oppose deux théorèmes. L'un, énoncé par Jordan dans le cadre de son *Traité des substitutions et des équations algébriques* de 1870, établit une forme canonique des substitutions du groupe

linéaire (annexe 2). L'autre, établi par Karl Weierstrass en 1868, énonce un système d'invariants, les diviseurs élémentaires, des couples non singuliers de formes bilinéaires (annexe 3). Si la question de l'identité entre ces deux théorèmes est un élément essentiel de la controverse¹, les arguments qu'opposent les deux protagonistes ne se limitent pas à une question d'équivalence mathématique et permettent de porter un regard sur l'histoire de l'algèbre linéaire qui dévoile des pratiques algébriques antérieures aux approches structurelles comme la théorie des matrices des années trente du xx^e siècle. Notre problématique vise à poser l'identité algébrique de telles pratiques comme « un problème et non une tautologie » pour reprendre l'expression employée par Catherine Goldstein qui, dans son ouvrage intitulé *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, a montré la pertinence de la question d'identité pour décrire des évolutions qui ne relèvent pas simplement d'une activité de recherche de nouveaux résultats ou de meilleures preuves mais témoignent « de pratiques et, à travers elles, de la manière dont est estimée l'innovation » [Goldstein 1995, p. 16]. Distinguer entre une « version moderne » et une « version originale » des deux théorèmes opposés en 1874 pose une question d'identité semblable à celle développée par Hourya Sinaceur dans son histoire du théorème de Sturm et qui nous amènera à « revenir, par delà les traditions didactiques, aux mémoires originaux. On y apprend toutes les identités que le « progrès » efface : identité d'un contexte, d'un objectif, d'une perspective, d'un langage, sans parler de tout ce qui reste implicite sans manquer d'être là » [Sinaceur 1991, p. 21]. Nous verrons que la richesse de l'histoire d'un théorème d'algèbre linéaire, comme le théorème de Jordan de la décomposition matricielle, provient souvent de ce qui échappe aux descriptions exprimées dans le cadre de mathématiques qui nous sont contemporaines.

¹ D'un point de vue qui nous est contemporain, le théorème de réduction d'une matrice à coefficients complexes à sa forme canonique de Jordan est équivalent au théorème des diviseurs élémentaires. Consulter par exemple le manuel de [Gantmacher 1959] ainsi que nos annexes 2 et 3. Ci-dessous, trois exemples de décompositions matricielles associées à la décomposition en diviseurs élémentaires d'un même polynôme caractéristique $|A - \lambda I| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)3(\lambda - 3)$.

Formes de Jordan	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$
Diviseurs élémentaires	$(\lambda - 1), (\lambda - 1),$ $(\lambda - 2), (\lambda - 2), (\lambda - 2)$ $(\lambda - 3)$	$(\lambda - 1), (\lambda - 1),$ $(\lambda - 2)^3$ $(\lambda - 3)$	$(\lambda - 1), (\lambda - 1),$ $(\lambda - 2), (\lambda - 2)^2$ $(\lambda - 3)$