ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 41 fascicule 4 juillet-août 2008

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Frédéric TOUZET

Feuilletages holomorphes de codimension un dont la classe canonique est triviale

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^e série, t. 41, 2008, p. 657 à 670

FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE CODIMENSION UN DONT LA CLASSE CANONIQUE EST TRIVIALE

PAR Frédéric TOUZET

Résumé. – We give a description of Kähler manifolds M equipped with an integrable subbundle $\mathcal{F}$ of TM of rank $n-1$ ($n = \dim M$) under the assumption that the line bundle Dét $\mathcal{F}$ is numerically trivial. This is a sort of foliated version of Bogomolov's theorem concerning Kähler manifolds with trivial canonical class.

Abstract. – Nous décrivons les variétés kählériennes compactes M de dimension complexe n dont le fibré tangent admet un sous-fibré holomorphe intégrable $\mathcal{F}$ de rang $n-1$ dont le fibré déterminant Dét $\mathcal{F}$ est à première classe de Chern nulle. Ce résultat peut en quelque sorte être considéré comme un avatar feuilleté du théorème de Bogomolov concernant les variétés kählériennes à fibré canonique numériquement trivial.

1. Introduction

Parmi les variétés kählériennes compactes M, celles dont le fibré canonique est numériquement trivial sont caractérisées par le remarquable résultat suivant, dû à F. Bogomolov :

Théorème 1.1 ([2, 1]). – *Supposons que $c_1(M) = 0$; alors M admet un revêtement (étale) fini $\tilde{M}$ qui est le produit d'un tore par une variété de Calabi-Yau.*

Rappelons qu'une variété kählérienne est dite de Calabi-Yau si elle est compacte, simplement connexe et admet une forme volume holomorphe, c'est-à-dire une forme holomorphe de degré maximal partout non nulle.

Suivant le fameux théorème de Yau ([Ya]), on peut munir une telle variété d'une métrique Ricci-plate dont l'holonomie induit une décomposition en produit de sous-variétés de Calabi-Yau irréductibles, c'est-à-dire dont le fibré tangent n'est pas holomorphiquement décomposable.

0012-9593/04/

Considérons une variété complexe M munie d'un feuilletage holomorphe régulier de codimension un. Ceci correspond à la donnée d'un sous-fibré intégrable $\mathcal{F}$ de rang $n-1$ du fibré tangent TM ($n = \dim_{\mathbb{C}} M$).

Il y a naturellement deux fibrés en droites holomorphes associés à $\mathcal{F}$, le fibré normal et le fibré canonique du feuilletage qui sont respectivement $N_{\mathcal{F}} = \frac{TM}{\mathcal{F}}$ et $K_{\mathcal{F}} = \text{Dét}\, \mathcal{F}^* = \wedge^{n-1}\mathcal{F}^*$ où $\mathcal{F}^*$ désigne le dual de $\mathcal{F}$.

Par adjonction, on hérite de l'isomorphisme

$$N_{\mathcal{F}}{}^* \otimes K_{\mathcal{F}} = K_M \tag{1.1}$$

où K_M désigne comme à l'habitude le fibré canonique de la variété M.

Dans cet article, on s'intéresse à la situation suivante : M est kählérienne compacte et est munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ dont la classe canonique est numériquement triviale, i.e.

$$c_1(K_{\mathcal{F}}) = 0.$$

Cette configuration est clairement réalisée par les trois exemples décrits maintenant :

i) à revêtement fini près, M est le produit d'un tore par une variété de Calabi-Yau et $\mathcal{F}$ est obtenu en tirant en arrière un feuilletage linéaire de codimension 1 sur le premier facteur par la projection canonique ;

ii) M est une fibration rationnelle au-dessus d'une variété à première classe de Chern nulle (et par suite décrite par le théorème de Bogomolov) et le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse aux fibres ;

iii) le feuilletage $\mathcal{F}$ est donné par une fibration en hypersurfaces à première classe de Chern nulle.

Nous affirmons que cette liste est exhaustive :

THÉORÈME 1.2. – *Soit M une variété kählérienne compacte munie d'un feuilletage holomorphe régulier de codimension 1 à fibré canonique numériquement trivial ; alors ce feuilletage est décrit par l'un des exemples (non mutuellement exclusifs) i),ii) ou iii) ci-dessus.*

Ces résultats ne sont guère surprenants si l'on a en vue les conjectures d'abondance. En effet, ces dernières prévoient que le feuilletage $\mathcal{F}$ coïncide avec la fibration d'Itaka-Kodaira de la variété lorsque celle-ci n'est pas uniréglée, ce qui correspond effectivement au point iii) et laisse présager que cette description reste valide lorsque $\mathcal{F}$ est singulier.

Toujours dans l'esprit des conjectures d'abondance, on peut motiver notre travail par l'étude de variétés possédant certaines propriétés numériques.

Considérons par exemple une variété projective M à fibré canonique nef de dimension de Kodaira *numérique* égale à 1, c'est-à-dire telle que $c_1{}^2(M) = 0$ et $c_1(M) \neq 0$. Géométriquement, cette dernière égalité suggère (dans un sens volontairement approximatif !) l'existence de directions d'annulation de la courbure du fibré canonique qui, dans quelques situations favorables pourraient être incarnées par un feuilletage à classe canonique (numériquement) triviale correspondant à l'exemple iii) ci-dessus.

Cet article est organisé comme suit.

Dans la section 2 est d'abord examiné le cas (facile) où la variété M est elle-même à classe canonique numériquement triviale. En fait, ce cas réapparaîtra de façon récurrente dans la discussion globale et va correspondre à l'exemple i) du théorème 1.2.

Nous construisons ensuite une classe α dans la cohomologie de Dolbeault canoniquement attachée au feuilletage $\mathcal{F}$. Cette opération peut être effectuée pour n'importe quel feuilletage holomorphe régulier de codimension 1. Si l'on revient maintenant à nos hypothèses ($c_1(K_{\mathcal{F}}) = 0$)), on montre que l'annulation de cette classe α nous renvoie au cas précité ($c_1(M) = 0$).

A contrario, sa non-annulation introduit une structure géométrique supplémentaire sur M, à savoir *un feuilletage holomorphe en courbes* $\mathcal{C}_\omega$, éventuellement singulier, mais en position très spéciale relativement à $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{C}_\omega \text{ est transverse à } \mathcal{F}$$

ou

$$\mathcal{C}_\omega \text{ est tangent à } \mathcal{F}.$$

Le reste de l'article est consacré à l'étude de ces deux configurations possibles.

Nous traitons dans la section 3 le cas « $\mathcal{C}_\omega$ transverse à $\mathcal{F}$ ». C'est à ce niveau que vont apparaître la plupart des ingrédients de la preuve du théorème principal.

Précisons un peu comment les choses s'articulent.

Hormis la situation où $\mathcal{C}_\omega$ est un feuilletage en courbes rationnelles, ce qui correspond à l'exemple ii) du théorème 1.2, on peut construire un courant T (lisse) invariant par holonomie de $\mathcal{F}$ « induit » par la métrique « naturelle » sur les feuilles de $\mathcal{C}_\omega$ suivant que celles-ci sont hyperboliques ou paraboliques. En particulier, le fibré canonique K_M est pseudo-effectif et sa classe de Chern est représentée par T. Dans ces conditions, $-T$ peut s'incarner comme courbure de Ricci d'une certaine métrique kählérienne. Cette métrique qui est, d'une certaine façon, canoniquement associée au feuilletage $\mathcal{F}$ dote ce dernier de propriétés de parallélisme.

Ceci permet de préciser la décomposition de De Rham de M (plus exactement celle de son revêtement universel), puis de constater que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont nécessairement fermées (dans le cas $c_1(M) \neq 0$).

Dans la quatrième et dernière section, les deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}_\omega$ sont supposés être tangents.

On montre dans un premier temps que la présence du feuilletage auxiliaire $\mathcal{C}_\omega$ entraîne la *pseudo-effectivité* du fibré canonique de la variété ambiante M.

De là, on déduit l'existence d'un courant positif invariant par holonomie de $\mathcal{F}$ et représentant la classe canonique de M. La situation est donc très similaire à celle étudiée dans la section 3 à ceci près que le courant est susceptible de présenter des problèmes de régularité. Cependant, le pseudo-groupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ conserve suffisamment de « bonnes » propriétés (au sens où c'est un pseudo-groupe de Lie) et, modulo une analyse au cas par cas, cette observation suffit à conclure.

Ce travail s'appuie, d'une part, sur des résultats de géométrie des feuilletages (Brunella, Kellum) et, d'autre part, sur quelques théorèmes classiques de géométrie riemannienne, en particulier ceux de Yau (conjectures de Calabi), Cheeger et Gromoll (variétés à courbure de Ricci positive ou nulle).

2. Feuilletage en courbes associé

2.1. Remarque préliminaire quand $c_1(M) = 0$

À revêtement fini près, la variété M est le produit d'un tore par une variété de Calabi-Yau (théorème 1.1). De plus, la formule d'adjonction 1.1 implique que $\mathcal{F}$ est défini par une forme holomorphe (éventuellement à valeurs dans un fibré plat) qui est donc identiquement nulle en restriction à toute sous-variété simplement connexe de M. Par suite, $\mathcal{F}$ est nécessairement un feuilletage « linéaire » sur M au sens de l'exemple i) donné dans l'introduction.

2.2. Classe de cohomologie α associée à $\mathcal{F}$

Considérons un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M suffisamment fin tel que sur chaque ouvert de la famille, les feuilles de $\mathcal{F}$ soient données par les niveaux d'une submersion holomorphe

$$f_i : U_i \to \mathbb{C}.$$

Sur chaque intersection $U_i \cap U_j$, les différentielles des f_i sont liées par la relation

$$df_i = g_{ij} df_j,\ g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$$

où le cocycle multiplicatif g_{ij} représente le fibré normal du feuilletage $N_{\mathcal{F}}$.

Le faisceau $\mathcal{F}_\infty$ des germes de $(1,0)$ formes différentielles lisses tangentes $\mathcal{F}$ est fin, ce qui assure l'existence de sections $\omega_i \in \mathcal{F}_\infty(U_i)$ vérifiant sur $U_i \cap U_j$:

$$\omega_i - \omega_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}.$$

Puisque les ω_i sont de la forme

$$g_i df_i$$

où $g_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$, on obtient par différentiation que

$$\overline{\partial} g_i = {g_{ij}}^{-1} \overline{\partial} g_j.$$

On constate ainsi que la collection des $\overline{\partial} g_i$ définit une *classe* α du groupe de cohomologie $H^{0,1}_{\overline{\partial}}({N_{\mathcal{F}}}^*)$.

En combinant isomorphisme de Dolbeault et dualité de Serre, on obtient que

$$H^{0,1}_{\overline{\partial}}({N_{\mathcal{F}}}^*) \simeq H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(N_{\mathcal{F}} \otimes K_M) \tag{2.1}$$

et par la formule d'adjonction (1.1)

$$H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(N_{\mathcal{F}} \otimes K_M) = H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(K_{\mathcal{F}}). \tag{2.2}$$

Cette construction fonctionne quelles que soient les propriétés numériques du fibré $K_{\mathcal{F}}$.

En revanche, il faut invoquer sa platitude (ce qui est bien notre hypothèse principale) pour pouvoir en déduire, par symétrie de Hodge, l'isomorphisme

$$H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(K_{\mathcal{F}}) \simeq H^{n-1,0}_{\overline{\partial}}(\text{Dét}\ \mathcal{F}). \tag{2.3}$$