Bulletin de la S. M. F.

Jean-Yves Boyer

Michel Hickel

Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 3 (1997), p. 315-335

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_3_315_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 315–335.

UNE GÉNÉRALISATION DE LA LOI DE TRANSFORMATION POUR LES RÉSIDUS

PAR JEAN-YVES BOYER ET MICHEL HICKEL (*)

RÉSUMÉ. — Cet article prouve comment, dans le cadre analytique des résidus, les représentations intégrales du type Bochner-Martinelli permettent d'obtenir une preuve complète d'une généralisation de la loi de transformation. On montre ensuite comment, dans une théorie très générale due à J. Lipman, ce résultat peut s'étendre sans le recours à des outils analytiques.

ABSTRACT. — This paper shows that integral representations of Bochner-Martinelli type is a way to achieve a complete proof of an generalized transformation formula for multidimensional complex residues. Then, without any use of analytic tools we extend this result in the algebraic residue formalism due to J. Lipman.

1. Introduction

Soient $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$ l'anneau des germes en 0 des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une suite de $\mathcal{O}_n$ qui admet 0 pour zéro isolé. Pour tout $h \in \mathcal{O}_n$ on définit le résidu de h, par rapport au germe de f en 0, par

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{Res}_{(f,0)}(h) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_f} \frac{h(z)\,\mathrm{d}z}{f_1(z)\cdots f_n(z)},$$

les nombres r et ϵ_i étant des réels strictement positifs suffisament petits ; Γ_f désigne le tube

$$\Gamma_f = \bigl\{\zeta \in B(0,r) : |f_i(\zeta)| = \epsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\bigr\}$$

orienté par la condition $\mathrm{d}(\arg f_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(\arg f_n) > 0$.

(*) Texte reçu le 20 juin 1996, accepté le 30 juin 1997.
J.-Y. BOYER et M. HICKEL, Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Bordeaux Sciences, 33405 Talence (France).
Email : boyer@math.u-bordeaux.fr et hickel@math.u-bordeaux.fr
Classification AMS : 32 A 27, 14 F 10.

Lorsque $\mathbf{R} = \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ est une suite de $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ qui définit une variété non vide et finie de $\mathbb{C}^n$, on définit pour tout $h \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ le résidu global de h par rapport à f par :

$$\operatorname{Res}_f(h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{C}^n \\ f(\alpha)=0}} \operatorname{Res}_{(f,\alpha)}(h). \tag{1.2}$$

Plus généralement, soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une suite de $\mathbf{R}$ quasi-régulière (*cf.* [Ku1] ou [M]) telle que $\mathbf{P} = \mathbf{R}/(f_1 \dots f_n)$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini.

En suivant J. Lipman [L, § 3], on peut alors définir pour tout ω appartenant à $\bigwedge^n \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, où $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ est le $\mathbf{R}$-module des différentielles de la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{R}$, le *résidu de ω par rapport à f* que nous noterons :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_n \end{bmatrix}.$$

Brièvement, la définition procède comme suit : $\mathbf{P}$ étant un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, il existe une section $\mathbf{A}$-linéaire $\sigma : P \to R$ de la surjection canonique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{P}$, et l'on peut définir sur $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ une application trace que l'on note $\operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}$ (*cf.* [B$_1$, chap. II, § 5]). Soit $\widehat{\mathbf{R}}$ le complété f-adique de $\mathbf{R}$. La suite f étant quasi-régulière, tout élément $r \in \mathbf{R}$ admet dans $\widehat{\mathbf{R}}$ une écriture unique de la forme :

$$r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma(r_\alpha) f^\alpha \quad \text{où} \quad r_\alpha \in \mathbf{P}. \tag{1.3}$$

Par conséquent, il existe des $\gamma_\alpha \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ uniques tels que :

$$\forall p \in \mathbf{P}, \quad r\sigma(p) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma\big(\gamma_\alpha(p)\big) f^\alpha. \tag{1.4}$$

On définit l'élément $r^\# \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})[[f]]$ par :

$$r^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha f^\alpha. \tag{1.5}$$

Pour $\omega = r\, \mathrm{d}r_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}r_n \in \bigwedge^n \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, soit :

$$r^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha f^\alpha \quad \text{et} \quad r_j^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_{j,\alpha} f^\alpha. \tag{1.6}$$

En notant ε_i le n-uplet à composantes toutes nulles sauf la i-ième qui vaut 1, on pose :

$$\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#}) = \sum_{\alpha^j=(\alpha_1^j,\dots,\alpha_n^j)\in\mathbb{N}^n} \alpha_i^j \gamma_{j,\alpha^j} f^{\alpha^j-\varepsilon_i},$$

$$\det\Big(\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#})\Big) = \sum_{\tau\in S_n} (-1)^{\tau} \frac{\partial}{\partial f_1}\big(r_{\tau(1)}^{\#}\big) \circ\cdots\circ \frac{\partial}{\partial f_n}\big(r_{\tau(n)}^{\#}\big)$$

et l'on considère l'élément de $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P})$:

$$r^{\#}\det\Big(\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#})\Big) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \delta_\alpha f^\alpha. \tag{1.7}$$

On définit, d'après J. Lipman [L, § 3], le *résidu de ω par rapport à f* par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\begin{bmatrix}\omega\\ f_1,\dots,f_n\end{bmatrix} &= \operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(\delta_0)\\ &= \operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}\Big\{\gamma_0\circ\sum_{\tau\in S_n}(-1)^\tau\gamma_{\tau(1),\varepsilon_1}\circ\cdots\circ\gamma_{\tau(n),\varepsilon_n}\Big\}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

On peut montrer que cette définition algébrique des résidus recouvre les définitions analytiques des résidus données en (1.1) et (1.2) (*cf.* [Boy]).

La définition donnée en (1.8) respecte la loi de transformation (voir [L, (2.8)]) : soient $f = (f_1,\dots,f_n)$ et $g = (g_1,\dots,g_n)$ deux suites quasi-régulières de $\mathbf{R}$; si les $\mathbf{A}$-modules $\mathbf{R}/(f_1\dots f_n)$ et $\mathbf{R}/(g_1\dots g_n)$ sont projectifs de type fini et s'il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$g = Af, \tag{1.9}$$

alors pour tout $\omega \in \wedge^n\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, on a :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix}\omega\\ f_1,\dots,f_n\end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix}\det(A)\,\omega\\ g_1,\dots,g_n\end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

L'utilité d'une telle « loi » est bien connue; cependant certaines démonstrations, comme celle proposée dans la preuve d'un Nullstellensatz effectif sur un corps de caractéristique quelconque dans [B-Y], ou encore, dans le cadre analytique les calculs effectués dans [E] ou [K], nécessitent d'exprimer le résidu par rapport à $(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1})$ où $(\beta_1,\dots,\beta_n)$

appartient à $\mathbb{N}^n$, en fonction d'une somme de résidus par rapport à $(g_1^{\alpha_1+1}, \ldots, g_n^{\alpha_n+1})$ où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ce que permet seulement la loi de transformation lorsque $\beta_i = 0$ pour tout i.

Lorsque $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$, l'article [K] d'une part, le livre [T] d'autre part proposent la formule :

$$(1.11) \qquad c_{i_1 \ldots i_m} \int_{\Gamma_f} \frac{h\,\mathrm{d}z}{f_{i_1} \cdots f_{i_m} f^I} = \sum_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{n} c_{j_1 \ldots j_m} \int_{\Gamma_g} \frac{h \det A a_{j_1, i_1} \cdots a_{j_m, i_m}\,\mathrm{d}z}{g_{j_1} \cdots g_{j_m} g^I}$$

où

$$f^I = f_1 \cdots f_n, \quad c_{i_1 \ldots i_m} = \alpha_1! \ldots \alpha_n!,$$

α_k désignant le nombre de fois où k apparaît dans la liste $(i_1, \ldots, i_m)$. Cette formule, proposée dans le cas général, est uniquement démontrée dans le cas où f et g ont un Jacobien non nul en 0.

Il est présenté ci-dessous une preuve analytique complète de (1.11). En fait, cette formule peut prendre sa place dans une théorie algébrique des résidus, une démonstration en est donnée dans le paragraphe 4.

La preuve analytique, présentée dans le paragraphe 2, utilise des formules de représentations intégrales de type Bochner-Martinelli (*cf.* [A], [C] ou [Y]). L'idée de cette preuve est due à A. Yger ; elle contient par ailleurs une méthode de démonstration originale de la loi de transformation (*cf.* [Y]). On se place dans le cadre de $\mathcal{O}_n$ et des suites $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ régulières, mais la preuve est aussi valable dans le cadre de $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$ et des suites $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ de $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$ qui définissent une variété discrète non vide de $\mathbb{C}^n$. On peut montrer que de telles suites sont quasi-régulières (voir [Boy]).

Dans la démonstration algébrique, présentée dans le paragraphe 4, on se place dans le cadre général d'une $\mathbf{A}$-algèbre commutative $\mathbf{R}$ où $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif, et l'on utilise le formalisme algébrique des résidus mis en place par J. Lipman (*cf.* [L]). Dans le cas particulier où l'on choisit $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$ ou bien $\mathbf{R} = \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$ et pour éléments de $\mathbf{R}$, $X_1 = Z_1, \ldots$, $X_n = Z_n$, le théorème 4.3 fournit le théorème 2.1 du paragraphe 2.

Nous remercions vivement A. Yger pour les discussions et idées qui nous ont aidés à réaliser ce travail.