Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PROBLÈME DE PLATEAU, ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT

Numéro 133

Nouvelle série

Laura DESIDERI

2 0 1 3

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2013

Vente au numéro : 35 € ($ 48)
Abonnement Europe : 262 €, hors Europe : 296 € ($ 444)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-766-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

MÉMOIRES DE LA SMF 133

PROBLÈME DE PLATEAU, ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT

Laura Desideri

Société Mathématique de France 2013
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

L. Desideri
Université Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé, 59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex.
E-mail : Laura.Desideri@math.univ-lille1.fr
Url : http://math.univ-lille1.fr/~desideri/

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 53A10, 34A30, 34M35, 34M50, 34M55, 32G34.

***Mots clefs*. —** Surfaces minimales ; systèmes complètement intégrables ; équations fuchsiennes et systèmes fuchsiens ; problème de Riemann-Hilbert ; déformations isomonodromiques ; système de Schlesinger.

PROBLÈME DE PLATEAU, ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT

Laura Desideri

Résumé. — Ce mémoire est consacré à la résolution du problème de Plateau à bord polygonal dans l'espace euclidien de dimension trois. Il s'appuie sur la méthode de résolution proposée par René Garnier dans un article méconnu, voire inconnu, publié en 1928. L'approche de Garnier est très différente de la méthode variationnelle, elle est plus géométrique et constructive, et permet d'obtenir des disques minimaux sans point de ramification. Cependant, elle est parfois très compliquée, voire obscure et incomplète. On retranscrit sa démonstration dans un formalisme moderne, tout en proposant de nouvelles preuves plus simples, et en en complétant certaines lacunes. Ce travail repose principalement sur l'utilisation plus systématique des systèmes fuchsiens et la mise en évidence du lien entre la réalité d'un système et sa monodromie.

La méthode de Garnier repose sur le fait que, par la représentation de Weierstrass spinorielle des surfaces minimales, on peut associer une équation fuchsienne réelle du second ordre, définie sur la sphère de Riemann, à tout disque minimal à bord polygonal. La monodromie de cette équation est déterminée par les directions orientées des cÃťtés du bord. Le bon point de vue consiste à considérer des polygones pouvant avoir un sommet en l'infini. Pour résoudre le problème de Plateau, on est donc amené à résoudre un problème de Riemann-Hilbert. On procède ensuite en deux étapes : on construit d'abord, par déformations isomonodromiques, la famille de tous les disques minimaux dont le bord est un polygone de directions orientées données. Puis on montre, en étudiant les longueurs des côtés des bords polygonaux, qu'on obtient ainsi tout polygone comme bord d'un disque minimal.

***Abstract* (The Plateau problem, Fuchsian systems and the Riemann-Hilbert problem)**

This dissertation is devoted to the resolution of the Plateau problem in the case of a polygonal boundary in the three-dimensional euclidean space. It relies on a method developped by René Garnier and published in 1928 in a paper which seems today to be totally forgotten. Even if Garnier's method is more geometrical and constructive than the variational one, it is sometimes really complicated, and even obscure or incomplete. We rewrite his proof with a modern formalism, we fill some gaps, and we propose some alternative easier proofs. This work mainly relies on a systematic use of Fuchsian systems and on the relation that we establish between the reality of such systems and their monodromy.

Garnier's method is based on the following result: using the spinorial Weierstrass representation for minimal surfaces, we can associate to each minimal disk with a polygonal boundary a real Fuchsian second order equation defined on the Riemann sphere. The monodromy of the equation is encoded by the oriented directions of the edges of the boundary. To solve the Plateau problem, we are thus led to solve a Riemann–Hilbert problem. Then, we proceed in two steps: first, by means of isomonodromic deformations, we construct the familly of all minimal disks with a polygonal boundary with given oriented directions. Then, by studying the edges's lengths of these polygonal boundaries, we show that every polygon is the boundary of a minimal disk.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter une résolution du problème de Plateau à bord polygonal, qui est très différente de la méthode variationnelle, et qui repose sur une méthode élaborée par René Garnier. Garnier a exposé cette méthode dans l'article *Le Problème de Plateau* [**16**]. Publié en 1928, c'est-à-dire environ deux ans avant les démonstrations du problème de Plateau obtenues indépendamment par T. Radó [**35**] et J. Douglas [**13**], cet article semble avoir été complètement oublié, voire ignoré à l'époque. Même si l'existence de cette résolution est aujourd'hui connue de certains spécialistes, lorsque j'ai commencé ma thèse (dont ce mémoire est un des résultats), personne ne semblait être en mesure de dire comment elle fonctionnait, ni même si elle était correcte ou non. Sa démonstration est en effet très compliquée, parfois elliptique et obscure, et certains passages en sont même peu convaincants. En s'inspirant des idées de Garnier, on propose ici une nouvelle preuve de ce résultat, qui soit non seulement complète et compréhensible, mais aussi plus simple, et qui apporte un point de vue nouveau sur la méthode de Garnier. Ce travail repose principalement sur l'utilisation plus systématique des systèmes fuchsiens et la mise en évidence du lien entre la réalité d'un tel système et sa monodromie. Cette clarification des fondements de la méthode de Garnier m'a permis de l'étendre au cas où l'espace ambiant est l'espace de Minkowski de dimension trois [**11**].

Les surfaces minimales sont les surfaces dont la courbure moyenne est partout nulle. Elles constituent les points critiques de la fonctionnelle d'aire pour les variations fixant le bord. La théorie des surfaces minimales a commencé au XVIII^{e} siècle, avec les débuts du calcul des variations, et connaît d'importantes avancées dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle, avec notamment la représentation due à Weierstrass de toute immersion conforme minimale à partir de deux fonctions holomorphes. À la fin du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle, les mathématiciens s'intéressent au « problème de Plateau », du nom du physicien belge Joseph Plateau qui en 1873, a établi expérimentalement, par de très nombreuses expériences sur les films de savon, que toute courbe fermée de l'espace est le bord d'une surface minimale. L'énoncé mathématique du problème de Plateau est le suivant : *étant donné une courbe fermée connexe de Jordan de l'espace euclidien de dimension trois, montrer qu'il existe une surface minimale régulière et ayant la topologie d'un disque dont le bord soit la courbe fermée.* Au début des années 1930, Tibor Radó [**35**] et Jesse Douglas [**13**] obtiennent indépendamment par la méthode variationnelle les premiers résultats généraux (reconnus !) du problème de Plateau. Cependant, ils ne parviennent pas à exclure l'existence de points de branchement isolés à l'intérieur ou au bord du disque minimal. Il faut attendre les années 1970, et les travaux de R. Osserman [**30**], R. Gulliver [**20**] et R. Osserman, R. Gulliver et H.L. Royden [**21**] pour obtenir une démonstration du problème de Plateau qui soit absolument complète.

La méthode de Garnier pour résoudre le problème de Plateau est très différente de la méthode variationnelle. Même si elle paraît moins puissante, elle permet d'obtenir des surfaces, qui, contrairement aux solutions de Douglas-Radó, sont régulières partout. De plus, l'approche de Garnier est plus géométrique, s'inscrivant dans la continuation des travaux de K. Weierstrass, B. Riemann, H.-A. Schwarz et G. Darboux. Elle est également plus constructive que la méthode variationnelle.

La méthode de Garnier repose sur la correspondance de tout disque minimal à bord polygonal avec une équation fuchsienne réelle du second ordre définie sur la sphère de Riemann. Cette correspondance est antérieure aux travaux de Garnier. Elle est donnée par la représentation de Weierstrass, aujourd'hui dite spinorielle, des immersions conformes minimales. Cette équation fuchsienne semble être mentionnée pour la première fois, de manière indépendante et presque simultanée, dans un bref article de Karl Weierstrass [**40**] publié au mois de décembre 1866, et lors d'une présentation posthume des travaux de Bernhard Riemann [**36**] par Hattendorf le 6 janvier 1867 à la Société Royale de Göttingen. Riemann n'utilise pas la représentation de Weierstrass, mais deux représentations conformes (sphérique et plane) du même disque minimal. Gaston Darboux étudie en détail cette équation associée à un disque minimal à bord polygonal (voir [**9**], chapitre XIII), et expose les difficultés à surmonter pour être en mesure de résoudre le problème de Plateau. Au premier rang de celles-ci figure la détermination d'une équation fuchsienne à partir de sa monodromie : c'est le « problème de Riemann-Hilbert », qui deviendra bientôt le vingt-et-unième des vingt-trois problèmes proposés par David Hilbert au Congrès International de Paris en 1900. C'est seulement une vingtaine d'années après ces observations de Darboux que seront obtenues les premières solutions du problème de Riemann-Hilbert, par J. Plemelj [**33**] et G. Birkhoff [**3**] — solutions dont A.A. Bolibruch a montré des décennies plus tard par une série de contre-exemples [**5**], [**6**] qu'elles contiennent une erreur.

Garnier est un étudiant de Paul Painlevé. En 1912, il publie un article [**14**] qui rassemble les résultats de sa thèse et dans lequel il étudie en particulier les déformations isomonodromiques d'équations fuchsiennes ayant un nombre arbitraire de singularités et aucune singularité logarithmique. Le système différentiel qui gouverne ces déformations, connu aujourd'hui sous sa forme hamiltonienne sous le nom de *système de Garnier*, est en un sens une généralisation de la sixième équation P_{VI} de Painlevé. En 1926, il propose une résolution du problème de Riemann-Hilbert [**15**] basée sur l'étude du système Schlesinger au voisinage de ses singularités non mobiles, et de ses liens avec le système de Garnier. Les résultats obtenus dans ces deux articles lui permettent d'espérer être en mesure de lever les difficultés mises en évidence par Darboux pour la résolution du problème de Plateau. Il lui reste néanmoins encore beaucoup de travail à accomplir pour obtenir cette résolution [**16**].