MÉMOIRES DE LA SMF 95

ERGODICITÉ ET ÉQUIDISTRIBUTION EN COURBURE NÉGATIVE

Thomas Roblin

Société Mathématique de France 2003
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

T. Roblin

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, UMR CNRS 7599,
Université de Paris VI, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.

E-mail : `roblin@ccr.jussieu.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 37D40, 37F35.

***Mots clefs*. —** Groupes discrets, courbure négative, dénombrement asymptotique, densités conformes, théorie ergodique, flot géodésique, feuilletage horosphérique, unique ergodicité, géodésiques fermées.

ERGODICITÉ ET ÉQUIDISTRIBUTION EN COURBURE NÉGATIVE

Thomas Roblin

Résumé. — Considérant un groupe d'isométries discret agissant sur un espace CAT(-1), nous établissons successivement, par des méthodes nouvelles et élémentaires, un théorème d'ergodicité du feuilletage horosphérique associé, le mélange du flot géodésique, l'équidistribution des points orbitaux du groupe, avec premier terme asymptotique exponentiel de la fonction orbitale, l'équidistribution des géodésiques fermées primitives avec, dans le cas géométriquement fini, leur dénombrement asymptotique. Enfin, nous démontrons un théorème général d'unique ergodicité du feuilletage horosphérique pour les groupes à mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie. Ces divers résultats sont nouveaux dans leur généralité.

Abstract **(Ergodicity and equidistribution in negative curvature)**

We consider a discrete isometry group acting on a CAT(-1) space, and successively establish, by new and elementary methods, an ergodicity theorem for the associated horospherical foliation, then mixing of the geodesic flow, orbital equidistribution of the group, with first asymptotic for the orbital counting function, equidistribution of primitive closed geodesics with, in the geometrically finite case, asymptotic counting. Endly, we prove a general unique ergodicity theorem for the horospherical foliation for groups with finite Bowen-Margulis-Sullivan measure. Those various results are new in their generality.

© Mémoires de la Société Mathématique de France 95, SMF 2003

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans le présent travail, nous nous sommes proposé d'établir des résultats généraux concernant la théorie ergodique du feuilletage horosphérique (ergodicité, unique ergodicité), le flot géodésique (mélange), le dénombrement et l'équidistribution asymptotiques des orbites du groupe d'isométries discret associé, ainsi que des géodésiques fermées. Signalons d'emblée que tous nos résultats étaient déjà connus dans le cadre des surfaces riemanniennes compactes de courbure négative constante, de bien des manières et parfois depuis longtemps. Aussi nous sommes-nous plutôt attachés ici à étendre autant que possible ces résultats dans le contexte de la géométrie de courbure négative, ce qui nous impose le recours exclusif à des méthodes élémentaires. C'est ainsi que notre environnement sera celui des espaces CAT(-1), large famille comprenant les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbures sectionnelles au plus -1, mais aussi les arbres, où nous étudierons l'action d'un groupe Γ d'isométries discret non élémentaire quelconque. Il se trouve qu'il s'agit là du cadre axiomatique naturel où puisse s'échafauder la théorie des densités conformes introduite par Patterson et Sullivan, laquelle sera présente tout au long de ce travail, car nous verrons qu'elle est suscitée par la nature même des problèmes envisagés (à propos des mesures invariantes pour les systèmes dynamiques en jeu, mais aussi des mesures d'équidistribution). C'est de cette manière que l'on peut encore aborder avec fruit les situations où le groupe discret en question n'agit pas de façon cocompacte.

Ce qui aura permis les généralisations que nous proposons ici, c'est la nature élémentaire des méthodes employées. D'ailleurs, pour qui connaît la géométrie de courbure négative, tout au moins le demi-plan de Poincaré, le présent article se suffit à lui-même, car nous ne nous sommes adressés à aucune des théories d'une certaine manière extrinsèques (théorie spectrale, dynamique symbolique) qui ont été bien souvent utilisées jusqu'à présent, non sans succès, mais qui ne peuvent toutefois porter dans leur généralité les résultats visés ici.

Si l'ensemble des thèmes abordés risque de paraître quelque peu disparate de prime abord, on verra qu'il n'en est rien, puisque ces divers problèmes seront reliés et traités les uns à partir des autres, selon un enchaînement que nous allons maintenant décrire, en suivant le déroulement de l'exposé subséquent. Cela justifie à notre sens la collection de ces résultats en un seul et même article.

Par feuilletage horosphérique, nous entendrons ici simplement l'ensemble des horosphères, ou encore le produit du bord à l'infini et de $\mathbb{R}$. Le système habituellement considéré, flot horocyclique ou feuilletage horosphérique stable ou instable, se ramène à l'action de Γ sur le précédent, avec ses mesures invariantes. La pierre angulaire de ce travail est un théorème d'ergodicité du feuilletage horosphérique, qui énonce que sous certaines conditions, les actions de Γ, d'une part sur le bord à l'infini par rapport à une densité conforme invariante, et d'autre part sur le feuilletage horosphérique par rapport à une mesure invariante canoniquement associée à la précédente densité, sont simultanément ergodiques (théorème 2.2). Ce résultat, qui rejoint des travaux récents de V. Kaimanovich, ne sera pas ici utilisé dans toute son étendue, loin s'en faut, puisque nous nous contenterons d'en extraire un corollaire affirmant l'ergodicité du feuilletage horosphérique lorsque Γ est de type divergent, c'est-à-dire lorsque le flot géodésique est ergodique (corollaire 2.3) ; la seule condition requise — et que l'on sait nécessaire -, est que le spectre des longueurs de Γ ne soit pas arithmétique, hypothèse que l'on conservera pour tout le restant de cet article (à noter qu'elle est toujours acquise en courbure constante et dans quelques autres cas).

Ce dernier corollaire nous permettra d'établir brièvement, pour n'importe quel groupe Γ, la propriété de mélange du flot géodésique pour la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan, que cette dernière soit finie ou non (théorème 3.1). Ce résultat, qui vient d'être encore démontré différemment par M. Babillot, n'était auparavant pas connu dans cette généralité, y compris en mesure finie. Il constitue véritablement la cheville ouvrière de notre travail, attendu que tout le restant en découle ; ses applications se répartissent en deux branches indépendantes : d'une part les divers théorèmes d'équidistribution asymptotique des chapitres 4 et 5, d'autre part celui d'unique ergodicité du feuilletage horosphérique du chapitre final (que le lecteur pourra aborder sitôt qu'il aura pris connaissance du corollaire 3.2 du théorème 3.1).

Dans le chapitre 4, le problème de la répartition asymptotique des points d'une orbite de Γ dans l'espace (« revêtement universel ») sur lequel il agit, est ici relié géométriquement au phénomène de mélange du flot géodésique, ce qui conduit à un énoncé d'équidistribution orbitale (théorème 4.1) exactement équivalent au théorème 3.1. Il s'organise de façon dichotomique, en distinguant le cas où Γ admet une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie (théorème 4.1.1), et le cas contraire (théorème 4.1.2). Dans le premier cas, on y voit que la fonction orbitale de Γ est exactement équivalente à une exponentielle (corollaire 2) ; au surplus, la probabilité uniforme sur les points d'une orbite dans une boule de rayon croissant (ce que dénombre justement la fonction orbitale) converge vaguement vers la mesure conforme de Patterson-Sullivan (corollaire 1) ; mais c'est un énoncé encore plus général qui traduit le mélange du flot géodésique, et qui consiste en une équidistribution de certaines paires de points orbitaux (théorème 4.1.1) — ce qui sera fondamental pour établir les résultats du chapitre 5. Dans le second cas, la signification du mélange du flot géodésique se résume en le fait que la fonction orbitale est négligeable devant l'exponentielle précédente (théorème 4.1.2). Quoique sur ce sujet de très nombreux résultats partiels fussent déjà connus, certains même plus poussés, aucun d'entre eux ne couvrait complètement la question du premier terme exponentiel asymptotique de la fonction orbitale au sens de la dichotomie précédente ; en fait, l'équivalent exponentiel n'était jusqu'à présent même pas établi pour tous les groupes géométriquement finis en courbure constante, et la contrepartie que constitue le théorème 4.1.2 n'était pratiquement jamais apparue. En outre, un fait important mérite d'être noté : c'est que les groupes géométriquement finis sont très loin d'être les seuls à admettre une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie, comme l'ont montré récemment A. Ancona et M. Peigné ; aussi le véritable critère dichotomique pour le comportement exponentiel de la fonction orbitale n'est pas la finitude géométrique, contrairement à ce que l'on a pu soupçonner. Pour terminer, nous insisterons sur le fait que les méthodes jusque-là employées pour aborder ces questions n'étaient que rarement élémentaires (théorie spectrale, dynamique symbolique).

Le chapitre 5 traite de la même façon le problème du comportement asymptotique des géodésiques fermées primitives, avec un théorème d'équidistribution (théorème 5.1), lui aussi exact équivalent des énoncés 3.1 et 4.1, et que l'on tirera de ce dernier. Lorsque Γ est convexe-cocompact, il en ressort un équivalent asymptotique du nombre de géodésiques fermées primitives de longueur majorée par un nombre croissant ; or ce dénombrement asymptotique reste valide dans le cas où Γ est seulement supposé géométriquement fini, grâce à des arguments supplémentaires (théorème 5.2). Les mêmes commentaires que précédemment ont cours ici, et nous ne les répétons pas.

Enfin, le chapitre 6 revient au feuilletage horosphérique, exclusivement pour un groupe Γ admettant une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie. Le théorème principal est le 6.4, qui affirme que le feuilletage horosphérique, restreint au produit de l'ensemble limite conique de Γ (qui correspond aux points non errants du flot géodésique) et de $\mathbb{R}$, est uniquement ergodique. Pour Γ géométriquement fini, il en découle une classification complète des mesures invariantes par le feuilletage horosphérique (corollaire 6.5). Ainsi a-t-on pu, par une méthode élémentaire, englober les résultats déjà connus, qui portaient soit sur les groupes convexe-cocompacts, soit sur les probabilités invariantes par le flot horocyclique en courbure constante. L'objet fondamental dont nous usons est une certaine moyenne horosphérique, succédané des moyennes ergodiques classiques.

Au cours de cette présentation de la colonne vertébrale de l'article, nous avons laissé de côté quelques résultats. Nous signalerons ici seulement un résultat général d'équidistribution asymptotique des orbites des points paraboliques (théorème 4.2), et aussi un énoncé ergodique de convergence des moyennes horosphériques (théorème 6.1).

Nous avons jugé utile que cet article débutât par des préliminaires, dont l'extension a toutefois ceci de fâcheux que l'exposé s'en trouve considérablement allongé, mais nous croyons pouvoir nous en justifier. En effet, quelques concepts usuels de la géométrie hyperbolique n'avaient pas encore fait l'objet d'une définition et d'une étude dans le cadre des espaces CAT(-1). De plus, certains résultats fondamentaux n'avaient pas été établis dans le cadre des espaces CAT(-1) ; lorsque la généralisation allait de soi, comme il arrive assez souvent, nous nous sommes contentés d'énoncés ; mais un théorème important, connu sous le nom de Hopf-Tsuji-Sullivan (théorème 1.7), gardait quelque obscurité, ce jusqu'en courbure constante, du fait notamment que certaines preuves présentaient des incorrections ; aussi avons-nous tenu à l'éclaircir une fois pour toutes en en exposant une preuve, afin de ne pas saper l'ensemble. Enfin, l'on pourra se dispenser en première lecture de la plus grande partie de ces préliminaires (voir les indications données au commencement).

Nous tenons à exprimer notre gratitude envers feu M. Babillot pour son attention portée au manuscrit. Nous en remercions également le rapporteur.