Revue d'histoire des mathématiques
12 (2006), p. 249–290

LA RÉCEPTION DES *VORLESUNGEN ÜBER NEUERE GEOMETRIE* DE PASCH PAR PEANO

Sébastien Gandon

Résumé. — Peano écrit en 1888 le *Calcolo geometrico*. Un an après, il publie *I principii di geometria*, où il développe, dans le sillage des *Vorlesungen über neuere Geometrie* de Pasch, une axiomatisation de la géométrie. Comment concevoir le rapport entre ce projet et celui du calcul géométrique ? Dans cet article, nous soulignons le profond fossé entre les deux entreprises : alors que l'élaboration d'une algèbre géométrique vise chez Peano à manifester la singularité des grandeurs spatiales par rapport aux nombres, l'axiomatisation se développe de façon autonome et sans aucune référence à la distinction entre entités géométriques et numériques. Mais nous montrons dans un second temps que la façon dont Peano lit Pasch est complètement tributaire de son engagement antérieur dans la tradition grassmannienne : le segment *AB* n'est pas, pour lui, comme il l'est pour Pasch un objet observable, mais le résultat d'un certain produit de points. Le tableau, au final, est assez complexe : d'une part, calcul et axiomatique sont supportés par des conceptions fondamentalement opposées de l'objet géométrique ; en même temps, la méthode axiomatique, telle qu'elle se développe dans *I principii*, résulte d'une lecture de Pasch selon une grille élaborée dans le *Calcolo*.

Texte reçu le 7 novembre 2005, révisé le 20 octobre 2006.

S. Gandon, MSH Clermont, PHIER, Université Blaise Pascal, 4 rue Ledru, 63000 Clermont-Ferrand, France.
Courrier électronique : sgandon@wanadoo.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 03-03.

Mots clefs : Pasch, Peano, calcul géométrique, axiomatique.

Key words and phrases. — Pasch, Peano, geometrical calculus, axiomatic.

Abstract (The Reception by Peano of Pasch's *Vorlesungen über neuere Geometrie*)

Peano wrote the *Calcolo geometrico* in 1888. One year later, in 1889, he published *I principii di geometria*, in which he developed, in Pasch's wake, an axiomatisation of geometry. What is the relationship between this work and the previous elaboration of a geometrical calculus ? In this article, we outline the deep difference between the two methods : although the construction of a geometrical algebra aimed at showing the specificity of spatial magnitudes, the axiomatisation does not refer to the ontological distinction between geometrical and numerical entities. However, we show that the way Peano read Pasch's *Vorlesungen* depended on his previous involvement in the Grasmannian tradition : for him, the segment AB does not refer (as it did for Pasch) to an observable object, rather, AB designates the result of a new geometrical product. In the end, the situation is quite complicated : on the one hand, the algebra and the axiomatic are grounded, in Peano's thought, on completely opposite conceptions of geometrical objects ; on the other, the axiomatic method, as it is developed in *I principii*, results directly from an interpretation of Pasch entirely based on the *Calcolo*.

En 1889, Peano rédige deux articles qui constituent le point de départ de son entreprise de réécriture de l'ensemble des mathématiques : le très célèbre *Arithmetices principia, nova methodo esposita*, consacré aux fondements de l'arithmétique, et *I principii di geometria logicamente esposti*, portant sur les principes de la géométrie. Comme le manifeste le choix des sous-titres, une commune « nouvelle méthode d'exposition », logique, axiomatique, se dégage de ces travaux. Dans la préface du premier opuscule, Peano caractérise son approche en ses termes :

> « Les questions relevant des fondements des mathématiques, bien que très travaillées de nos jours, manquent encore d'une solution satisfaisante. Les difficultés les plus grandes proviennent de l'ambiguïté du discours.
>
> Pour cette raison, il est de la plus haute importance de considérer attentivement les mots que nous utilisons. J'ai pris la décision de faire cet examen, et présente dans cet article les résultats de mon étude, ainsi que des applications à l'arithmétique.
>
> J'ai indiqué par des signes toutes les idées qui apparaissent dans les fondements de l'arithmétique, de façon à ce que chaque proposition soit énoncée à l'aide de ces seuls signes. [...]
>
> Grâce à cette notation, chaque proposition [du système] possède la forme et la précision dont les équations jouissent en algèbre, et de ces propositions ainsi écrites d'autres peuvent être déduites, par un processus qui ressemble à celui de la résolution des équations algébriques[1]. »

[1] [Peano 1889a, p. iii] : « *Quaestiones, quae ad mathematicae fundamenta pertinent, etsi hisce temporibus a multi tractatae, satisfacienti solutione et adhuc carent. Hic difficultas maxime ex sermonis ambiguitate oritur. Quare summi interest verba ipsa, quibus utimur attente perpendere. Hoc examen mihi proposui, atque mei studii resultatus, et arithmeticae applicationes in hoc scripto expono. Ideas omnes quae in arithmeticae principiis occorrunt, signis indicavi, ita ut quaelibet propositio his tantum signis enuncietur. [...]. His notationibus quaelibet propositio formam assumit atque praecisionem, qua*

Ce n'est donc qu'en usant d'une notation artificielle respectant les articulations conceptuelles que le mathématicien peut espérer, selon Peano, se libérer des associations non justifiées que la langue commune introduit dans le contenu scientifique, et fonder de façon enfin satisfaisante les mathématiques.

Mais dans l'extrait cité, un autre élément attire l'attention : la comparaison de la déduction à la résolution d'équation, celle de la proposition à une équation. La comparaison arrête surtout lorsqu'on la replace dans le contexte des travaux de Peano. Le mathématicien a, en effet, publié en 1888, un an avant d'écrire ces lignes, un ouvrage intitulé *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, consacré, comme son nom l'indique, aux algèbres géométriques et plus particulièrement au calcul grassmannien. Quel rapport faire entre le *Calcolo* et les deux articles de 1889 ? En quoi la méthode employée dans *Arithmetices principia et I principii* est-elle nouvelle, si en la présentant, Peano la compare à celle, toute algébrique, de la résolution d'équations ? Plus généralement, comment concevoir, chez le mathématicien italien, la relation entre calcul et axiomatique ?

L'idée qu'il y a une continuité entre la tradition du calcul géométrique et l'approche fondationnelle ultérieure est souvent avancée dans la littérature secondaire[2] : le *Calcolo* représenterait la première étape du processus aboutissant au projet d'axiomatisation développé dans la *Rivista* [Peano 1894]. À l'inverse, la distinction, effectuée pour la première fois par van Heijenoort, entre la logique comme langue et la logique comme calcul pourrait suggérer une opposition entre l'approche axiomatique et celle de l'algèbre géométrique [van Heijenoort 1967]. Même si la position de Peano à l'égard de la logique n'est pas facilement caractérisable[3], la nouvelle présentation adoptée en 1889, qui met en avant l'existence d'une partie logique commune à toutes les branches mathématiques, paraît plus propice au développement d'un universalisme logique, que le modèle algébrique déployé dans le *Calcolo*.

Nous voudrions, dans ce qui suit, défendre deux thèses. La première est qu'il y a discontinuité sur le plan de la méthode entre le *Calcolo* [Peano 1888] et *I principii* [Peano 1889b]. En 1888, Peano met au point

in algebra aequationes gaudent, et a propositionibus ita scriptis aliae deducuntur, idque processis qui aequationum resolutioni assimilantur. » Les traductions ont été faites par l'auteur de cet article.

[2] Grattan-Guinness [2000, p. 223–224] écrit : « [Peano, dans le *Calcolo*] employait un style plus axiomatique que Grassmann lui-même [...], un trait qui prendra de l'importance dans son travail à partir de ce livre. » ; voir également [Bottazzini 1895] et note *infra*.

[3] Voir sur ce point les analyses de Rodriguez-Consuegra [1991]. La logique est parfois définie par Peano comme un instrument, parfois comme une science dotée d'un objet propre.

un symbolisme s'appliquant directement à un certain type d'entité spécifiée par avance ; la méthode nouvelle mobilisée dans *I principii* entend caractériser de manière complète un domaine de réalité en ne se référant qu'à ses propriétés formelles. Mais notre seconde thèse atténue quelque peu cette première opposition : la référence au calcul est encore bien présente dans *I principii* et permet à Peano, qui suit les *Vorlesungen über neuere Geometrie* [Pasch 1822a] de très près, de renouveler complètement l'approche développée par Pasch. La reformulation, en termes algébriques, des concepts géométriques fondamentaux, élimine les contraintes très fortes que le parti pris empiriste du mathématicien allemand (Pasch) faisait peser sur sa propre pratique. Pour le dire autrement, c'est grâce au calcul que Peano réussit à penser l'axiomatique comme un système abstrait.

Dans les deux premières sections de l'article, nous montrerons en quoi la méthode du *Calcolo* diffère de celle utilisée dans *I principii.* Dans la troisième section, nous présenterons l'axiomatisation proposée dans *I principii* et la comparerons à celle exposée dans les *Vorlesungen.* Enfin, dans un dernier temps, nous pointerons, en prenant quelques exemples, la différence fondamentale entre Peano et Pasch.

1. CALCUL GÉOMÉTRIQUE ET AXIOMATIQUE DE LA GÉOMÉTRIE

I principii di geometria présente un système qui ne contient, outre les symboles logiques, que deux signes primitifs, les lettres de point et de segment :

> « Le signe **1** se lira point. [...]
>
> Si a, b sont des points, par ab nous entendrons la classe formée des points intérieurs au segment ab. Ainsi, la formule $c \in ab$ signifiera 'c est un point intérieur au segment ab'[4]. »

Tous les autres concepts fondamentaux, notamment ceux de droite et de plan, sont définis à partir de ces deux là. Mais quel statut ont ces entités primitives ?

Que ce soit en 1889 ou en 1894[5], Peano ne conçoit pas les concepts géométriques primitifs comme étant définis implicitement par l'ensemble des axiomes. Suivant la plupart de ses contemporains, en particulier Pasch, le mathématicien italien considère alors la géométrie comme une

[4] [Peano 1889b, p. 9] : « *Il signo* **1** *leggasi punto. [...] Se a, b sono punti, con ab intenderemo la classe formata dai punti interni al segmento ab. Quindi la formula c* $\in$ *ab significa 'c è un punto interno al segmento ab'.*

[5] 1894 est la date de publication de *Sui fondamenti della geometria* qui reprend et étend le propos de *I principii.*

science de la nature, qui décrit certaines propriétés élémentaires des corps. Peano écrit ainsi dans la préface de *I principii di geometria* :

> « Quelles sont, parmi les entités géométriques, celles que nous pouvons définir et celles qu'il nous faut admettre sans définition ?
>
> Et, parmi les propriétés de ces entités qui sont *expérimentalement* vraies, lesquelles pouvons-nous admettre sans démonstration, et lesquelles devons-nous déduire comme conséquence ?[6] » [Nous soulignons.]

Dans *Sui fondamenti della geometria*, il est encore plus explicite :

> « Avant d'abandonner ce sujet, une remarque concernant la nature *pratique* ou *expérimentale* des postulats sera encore utile. On a certes le droit de poser les hypothèses que l'on veut et de développer les conséquences logiques qu'elles contiennent. Mais pour qu'un tel travail mérite le nom de Géométrie, il faut que ces hypothèses ou postulats expriment le résultat *des observations les plus simples et élémentaires des figures physiques*[7]. » [Nous soulignons.]

La méthode de Peano n'est pas celle de Hilbert. Les termes non définis désignent chez le mathématicien italien une classe d'objets ou de relations empiriquement identifiables, dont les principales propriétés sont énoncées dans les postulats.

Malgré tout, comme l'ont montré de nombreux commentateurs, [Avellone *et al.* 2002], [van der Waerden 1986], [Freguglia 1985], [Contro 1976], Peano a une très claire conscience du caractère « abstrait » de son système. Si l'expérience fonde la vérité des axiomes et donne une signification aux concepts primitifs, elle ne joue, et ne doit jouer, aucun rôle dans le développement des preuves. C'est ce qu'indique Peano lorsqu'il affirme, dans l'extrait cité, que l'on a le droit « de poser les hypothèses que l'on veut et de développer les conséquences logiques qu'elles contiennent ». La possibilité d'une axiomatisation ne dépend pas d'un ancrage empirique, et l'interprétation des symboles primitifs n'a aucune incidence sur le développement théorique lui-même. Il précise ainsi :

> « Le lecteur peut comprendre [*può intendere*] par le signe **1** une catégorie quelconque d'entités, et par $c \in ab$ une relation quelconque entre trois entités de cette catégorie ; toutes les définitions qui suivent (§ 2) auront toujours une valeur, et toutes les propositions du § 3 subsisteront. Selon la signification attribuée aux signes non définis **1** et $c \in ab$, les axiomes pourront être, ou non, satisfaits. Si un certain groupe d'axiomes est vérifié, *toutes les propositions qui s'en*

[6] [Peano 1889b, p. 3] : « *Quali fra gli enti geometrici si possono definere, e quali occorre assumere senza definizione ? E fra le proprietà, sperimentalmente vere, di questi enti, quali bisogna assumere senza dimostrazione, e quali si possono dedurre in conseguenza ?* »

[7] [Peano 1894, p. 75] : « *E prima di abbandonare questo soggetto, sarà ancora utile un'osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenuto in quelle ipotesi. Ma affinchè questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche.* »