Revue d'Histoire des Mathématiques

Gödel et la thèse de Turing

Pierre Cassou-Noguès

Tome 14 Fascicule 1

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2008 : prix public Europe : 65 €; prix public hors Europe : 74 €;
prix au numéro : 36 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, B.P. 67, 13274 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
14 (2008), p. 77–111

GÖDEL ET LA THÈSE DE TURING

Pierre Cassou-Noguès

Résumé. — Cet article porte sur la discussion par Gödel de la thèse de Turing. Pour l'essentiel, nous présentons des notes inédites conservées dans les Archives Gödel, qui apportent des éléments nouveaux sur la relation ambiguë de Gödel à Turing. La première section examine la position qu'avait Gödel avant 1937 sur la possibilité d'une définition de la calculabilité. La deuxième concerne directement l'interprétation par Gödel de la thèse de Turing. Dans plusieurs passages, antérieurs à 1937, Gödel qualifie de « mécaniques » les procédures définies par des règles qui font abstraction du sens des symboles et ne portent que sur leur forme extérieure. Plusieurs notes montrent ensuite que Gödel identifie la thèse de Turing comme posant que ces procédures « mécaniques » (au sens où Gödel l'entendait avant Turing) sont représentables par une machine de Turing. Ce n'est pas en toute rigueur la thèse de Turing, puisque l'article de 1937, pris à la lettre, entend définir les procédures « finies ». Ce déplacement laisse Gödel libre de critiquer, après 1964, le texte de Turing, et la définition des procédures « finies » par des machines de Turing. La dernière section est consacrée à l'analyse d'un argument élaboré contre Turing par lequel Gödel entend justifier la possibilité de procédures finies mais non mécaniques.

Abstract (Gödel and Turing's thesis). — This paper concerns Gödel's remarks on Turing's thesis. Of fundamental importance to this analysis are unpublished notes kept among Gödel's papers. The first section concerns Gödel's position on the possibility of a definition of computability before

Texte reçu le 29 mars 2006, révisé le 7 décembre 2007.

P. Cassou-Noguès, CNRS, UMR, Savoirs, Textes, Langage, Université Lille III, B. P. 149, 59653 Villeneuve d'Ascq.

Courrier électronique : pierre.cassou-nogues@univ-lille3.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 03D10, 03F30.

Mots clefs : Turing, Gödel, machines, calculabilité, incomplétude.

Key words and phrases. — Turing, Gödel, machines, computability, incompleteness.

1937. The second and main section presents different notes on Turing's famous paper of 1937. Before 1937, Gödel qualified as "mechanical" procedures defined by rules that ignore the meaning of symbols and only consider their exterior form. Several notes then show that Gödel interpreted Turing's thesis as the claim that mechanical procedures in that sense can be represented by Turing machines. But Turing himself intended to define "finite" procedures. This shift enabled Gödel after 1964 to criticize Turing's paper. The third and last section deals with Gödel's argument against Turing, in which Gödel aimed to establish the existence of finite but non-mechanical procedures.

Ni dans les articles et conférences rassemblés dans les *Collected Works*, ni dans les notes, qui restent inédites, de la bibliothèque de Princeton, il n'y a véritablement de texte, où Kurt Gödel présente de façon circonstanciée sa position vis-à-vis de la thèse de Turing. Ce ne sont que des remarques fragmentaires, presque des aphorismes. Et celles-ci posent de nombreux problèmes. Le problème le plus marquant, et que signale en particulier J. C. Webb [1990, p. 293] est le suivant. On le sait, dans l'article présenté en 1936 et publié en 1937, Alan Turing utilise la notion de machine pour donner une définition de la calculabilité. Une fonction calculable est une fonction susceptible d'être calculée par une machine d'une certaine sorte, un dispositif donné par une description d'une certaine forme, disons une machine de Turing. Il y a d'autres définitions de la calculabilité. La première (au moyen du λ-calcul) est proposée par Alonzo Church autour de 1934. Une seconde définition est formulée par Gödel lui-même au printemps 1934. Ou, plus exactement, Gödel donne à partir d'une suggestion de Jacques Herbrand un énoncé que l'on peut considérer comme une définition de la calculabilité mais que lui-même ne présente pas comme tel. Nous y reviendrons. Enfin, à la suite de Turing, Emil Post et Stephen Kleene en 1936 proposeront deux autres définitions. Toutes ces définitions sont équivalentes. Mais, pour Gödel, c'est seulement l'analyse de Turing qui saisit le contenu intuitif de la notion de calculabilité et montre alors l'adéquation de ces définitions. C'est pourquoi, du reste, nous parlons de la thèse de Turing plutôt que de la thèse de Church-Turing comme on le fait habituellement. La définition de Turing justifie les autres, celle de Church par exemple, qui lui est équivalente. En particulier, c'est toujours sur la définition de Turing que s'appuie Gödel pour reformuler son théorème d'incomplétude et lui donner sa plus grande généralité. En même temps, Gödel [1972b, p. 306], dénonce « une erreur philosophique dans le travail de Turing ». Il soutient l'existence de « procédures finies non mécaniques » ou, par conséquent, des « procédures calculables » mais calculables de façon non mécanique, ce qui revient à nier la thèse de Turing. Turing, en effet, dans son article de 1937, visait à définir les procédures *finies* ou « calculables par des moyens finis » grâce à sa notion de machine. Parler de procédures finies non mécaniques comme le fait Gödel suppose donc une critique de Turing. Pourquoi, comment alors se référer à cette même thèse de Turing pour généraliser le théorème d'incomplétude ?

Nous nous appuierons sur des notes inédites conservées à la bibliothèque de l'université de Princeton, pour essayer de donner quelques éléments nouveaux sur la relation, ambiguë donc, de Gödel à Turing. Nous n'évoquerons pas les relations de Gödel aux autres acteurs de cette période, Church, Post ou même von Neumann, ce qui nous entraînerait trop loin. Nous ne tenterons pas non plus de mesurer la justesse des arguments que Gödel élabore contre Turing. Nous voulons seulement analyser le développement de la pensée de Gödel sur la question de la calculabilité et le sens de son interprétation de la thèse de Turing.

Sur le problème que nous venons d'évoquer — Gödel utilisant et critiquant à la fois la thèse de Turing — nous voudrions esquisser dès maintenant notre argument. La question est de savoir ce que Gödel accepte dans la thèse de Turing et ce qu'il refuse. Ou, en d'autres termes, ce que, selon Gödel, Turing définit avec sa notion de machine. Comme J. C. Webb et W. Sieg l'ont exactement formulé, à partir de plusieurs passages des textes de Gödel, le logicien considère la thèse de Turing comme une définition de la notion de « procédure mécanique ». Cependant, il reste à savoir ce que Gödel entend par « procédure mécanique » quand il affirme que c'est cette notion que définit Turing. Or nous voudrions montrer, que, avant même la thèse de Turing, Gödel utilise le terme de « procédure mécanique » pour désigner des opérations à l'intérieur d'un système formel, déterminées par des règles qui ne mettent en jeu que la forme des symboles et font abstraction du sens des symboles. Gödel ajoute même, dans des brouillons de 1933 et 1934 (citations (14) et (15) ci-dessous), que l'on pourrait imaginer une machine qui mette en œuvre ces règles. Il ne donne à cette assertion qu'un sens vague. Mais, dans son esprit, la notion de machine de Turing vient lui donner un sens précis. Nous interpréterons en particulier une note (citation (19)), où Gödel définit et oppose les procédures mécaniques et les procédures non mécaniques, comme l'énoncé pour Gödel de la thèse de Turing : les procédures mécaniques, au sens où Gödel l'a toujours entendu, c'est-à-dire les procédures qui ne considèrent que la forme des symboles et font abstraction de leur sens, peuvent être représentées par des machines de Turing. Cette thèse n'est pas celle de Turing, qui entend définir les procédures « finies ». Ce déplacement passe d'abord inaperçu,