

Revue d'Histoire des Mathématiques



Les fondements de la géométrie selon Friedrich Schur

Jean-Daniel Voelke

Tome 16 Fascicule 2

2 0 1 0

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :

Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Tom Archibald

Alain Bernard

Frédéric Brechenmacher

Marie-José Durand-Richard

Étienne Ghys

Hélène Gispert

Jens Høyrup

Agathe Keller

Laurent Mazliak

Karen Parshall

Jeanne Peiffer

Sophie Roux

Joël Sakarovitch

Dominique Tournès

Directeur de la publication :

Bernard Helffer

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall

June Barrow-Greene

Liliane Beaulieu

Umberto Bottazzini

Jean Pierre Bourguignon

Aldo Brigaglia

Bernard Bru

Jean-Luc Chabert

François Charette

Karine Chemla

Pierre Crépel

François De Gandt

Moritz Epple

Natalia Ermolaëva

Christian Gilain

Catherine Goldstein

Jeremy Gray

Tinne Hoff Kjeldsen

Jesper Lützen

Antoni Malet

Irène Passeron

Christine Proust

David Rowe

Ken Saito

S. R. Sarma

Erhard Scholz

Reinhard Siegmund-Schultze

Stephen Stigler

Bernard Vitrac

Secrétariat :

Nathalie Christiaën

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05

Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96

Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2010 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 38 €.

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

© SMF N° ISSN : 1262-022X

Maquette couverture : Armelle Stoskopf

LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE SELON FRIEDRICH SCHUR

JEAN-DANIEL VOELKE

RÉSUMÉ. — Friedrich Schur (1856-1932) a accompli d'importantes recherches sur les fondements de la géométrie à la même époque que Hilbert. Elles ont trouvé leur aboutissement dans un livre publié en 1909 et intitulé, comme celui de Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. La construction axiomatique exposée par Schur est originale et différente de celle de Hilbert. Elle trouve son origine dans les travaux de Pasch et Peano. Elle prend comme point de départ la géométrie projective et accorde une place centrale à la notion de déplacement. Elle repousse le plus loin possible l'utilisation de l'axiome d'Archimède et permet de fonder simultanément plusieurs géométries. L'article retrace d'abord la genèse des recherches de Schur. Il présente ensuite en détail les différentes étapes de sa construction axiomatique. Il essaie enfin d'expliquer pourquoi le livre de Schur est aujourd'hui presque oublié alors que celui de Hilbert est toujours étudié.

ABSTRACT (Foundations of geometry after Friedrich Schur)

Friedrich Schur (1856-1932) carried out important research on the foundations of geometry in the same period as Hilbert. Schur's conclusions were published in 1909 in a book entitled, as Hilbert's, *Grundlagen der Geometrie*. The axiomatic construction exposed by Schur is original and different from Hilbert's. Its roots lie in projective geometry and it gives an essential place to the notion of displacement. As far as possible it avoids the use of the postulate of Archimedes and allows a simultaneous foundation of several geometries. This paper first

Texte reçu le 26 janvier 2008, révisé le 2 octobre 2009.

J.-D. VOELKE, Chemin de Primerose 47, CH-1007 Lausanne, Suisse.

Courrier électronique : jd.voelke@citycable.ch

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 51-03.

Mots clefs : Friedrich Schur, David Hilbert, géométrie projective, géométrie non euclidienne, fondements de la géométrie.

Key words and phrases. — Friedrich Schur, David Hilbert, projective geometry, non euclidean geometry, foundations of geometry.

gives an account of the genesis of Schur's research. It then presents in detail the different steps of his axiomatic construction. Finally it tries to explain why today Schur's book is nearly forgotten while Hilbert's is still studied.

INTRODUCTION

Friedrich Schur est né en 1856 à Maciejewo (entre Poznan et Wrocław, à l'époque Posen et Breslau). Il étudia à Breslau puis à Berlin où il suivit notamment les cours de Gustav Kirchhoff, Leopold Kronecker, Karl Weierstrass et Ernst Kummer. C'est à ce dernier qu'il dédia sa dissertation soutenue en 1879 et intitulée *Geometrische Untersuchungen über Strahlenkomplexe ersten und zweiten Grades*. L'année d'après, il présenta son habilitation à Leipzig. Il enseigna dans cette ville jusqu'en 1888, d'abord comme privat-docent puis comme professeur extraordinaire ; il y fut collègue de Felix Klein puis de Sophus Lie. Il poursuivit ensuite sa carrière comme professeur à Dorpat (actuellement Tartu en Estonie), Aachen, Karlsruhe, Strasbourg et Breslau. Il est mort dans cette ville le 18 mars 1932.

Schur a effectué des recherches dans trois domaines principaux : la géométrie, la théorie des groupes de transformations de Lie et les fondements de la géométrie. Les premières années de sa carrière (depuis sa dissertation jusqu'à son départ à Dorpat en 1888) sont caractérisées par plusieurs publications importantes dans le domaine de la géométrie (projective et différentielle). L'arrivée de Lie à Leipzig en 1886 permit à Schur de s'initier à la théorie des groupes de transformations et d'entreprendre à son tour des recherches sur ce sujet ; elles donnèrent lieu à plusieurs articles publiés entre 1888 et 1893. Les recherches sur les fondements de la géométrie sont plus tardives. Elles comportent divers articles publiés entre 1891 et 1904 et se concluent par un ouvrage intitulé *Grundlagen der Geometrie* [Schur 1909]. Ce livre obtint le prix Lobatchevski, décerné par la Société mathématique de Kasan, en 1912¹. Cette distinction témoigne de

¹ Ce prix fut attribué pour la première fois en 1897 à Lie pour le troisième volume de sa *Theorie der Transformationsgruppen* [Lie 1893]. Il fut ensuite décerné en 1900 à Wilhelm Killing pour son livre *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* [Killing 1893] et en 1903 à David Hilbert pour ses *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1899].

L'importance accordée par les contemporains au livre de Schur et montre que celui-ci fut placé par certains d'entre eux dans la même catégorie que l'ouvrage homonyme de Hilbert [Hilbert 1899]. Plusieurs comptes rendus soulignent aussi sa valeur². La postérité en a cependant jugé différemment. Si le livre de Hilbert est aujourd'hui encore régulièrement réédité et étudié, celui de Schur est presque oublié. Ses recherches sur les fondements de la géométrie effectuées à une époque pourtant cruciale dans le développement de cette discipline n'ont guère retenu l'attention des historiens³; seule sa démonstration originale du théorème fondamental de la géométrie projective [Schur 1898a] est régulièrement citée dans la littérature. Il m'a donc semblé qu'il y avait une lacune historique à combler et que les travaux de Schur devaient faire l'objet d'une relecture destinée à décrire précisément sa méthode, à en montrer l'origine et à en dégager les aspects originaux. L'article comportera trois parties :

² Voici ce qu'écrivit à son propos Albert Châtelet dans le *Bulletin des sciences mathématiques* :

« Actuellement de profondes modifications tendent à s'introduire, tant dans l'enseignement que dans notre conception de la Géométrie. On ne peut encore dire jusqu'où iront ni à quoi aboutiront ces tentatives, mais on peut affirmer que le Livre de M. Schur, par son exposé méthodique et simple de nombreuses questions, marquera une des étapes de cette transformation. » [Châtelet 1910, p. 72]

Ce texte témoigne bien du changement profond qui s'effectue au début du xx^e siècle après la publication des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert et la diffusion de la méthode axiomatique.

³ Dans son article nécrologique sur Schur [Engel 1935], Friedrich Engel traite principalement des travaux de Schur consacrés à la théorie des groupes de transformations de Lie et ne dit presque rien de ceux consacrés aux fondements de la géométrie. Dans son édition commentée des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert [Hilbert 1899], Paul Rossier consacre trois pages à Schur; il décrit de manière très générale sa méthode. Il faut encore citer une courte note de Kuno Fladt [Fladt 1957] publiée à l'occasion du centenaire de la naissance de Schur. Fladt qualifie Schur de l'un des plus importants géomètres allemands. Il regrette que ses recherches aient été éclipsées par celles de Hilbert et souhaite que son livre soit réédité. Il met l'accent sur l'intérêt pour l'enseignement scolaire des recherches de Schur. Cette dernière remarque est probablement à mettre en relation avec l'importance accordée à cette époque en Allemagne à la notion de transformation dans l'enseignement de la géométrie. Cette notion joue en effet un rôle important dans le livre de Schur.