ARNAUD BEAUVILLE

Le problème de Torelli

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 651, p. 7-20
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__7_0>

Séminaire BOURBAKI
38ème année, 1985-86, n°651

Novembre 1985

LE PROBLÈME DE TORELLI

par Arnaud BEAUVILLE

1. Le cadre

Soit X une variété kählérienne compacte. Les groupes de cohomologie $H^n(X,\mathbb{Z})$ sont munis d'une *structure de Hodge* de poids n, c'est-à-dire d'une décomposition

$$H^n(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} \quad \text{avec} \quad H^{q,p} = \overline{H^{p,q}} \quad .$$

Dans la suite, je ne considérerai que le cas $n = \dim(X)$. Le $\mathbb{Z}$-module $H^n(X,\mathbb{Z})$ est alors muni d'une forme bilinéaire Q (définie par le cup-produit), symétrique ou alternée suivant que n est pair ou impair. La structure de Hodge est compatible avec Q, ce qui signifie qu'on a

$$Q(H^{p,q}\ ,\ H^{r,s}) = 0 \quad \text{si} \quad r \neq q \quad ,$$

ainsi que des conditions de signe sur la forme $Q(x,\bar{x})$ pour lesquelles je renvoie à [Gr1] ou [De] .

Soit $\mathfrak{M}$ un ensemble de classes d'isomorphisme de variétés kählériennes compactes de dimension n, de type topologique fixé. Le *problème de Torelli* (global) pour $\mathfrak{M}$ est la question suivante : soient X, X' deux variétés de $\mathfrak{M}$, telles qu'il existe une isométrie $\varphi : H^n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(X',\mathbb{Z})$ respectant les structures de Hodge (je dirai, plus brièvement, une isométrie de Hodge). Peut-on conclure que X et X' sont isomorphes ? On peut être plus exigeant, c'est ce que j'appellerai le *problème de Torelli fin* : existe-t-il un isomorphisme $u : X' \longrightarrow X$ tel que $u^* = \varphi$?

Suivant les situations, on est amené à envisager diverses variantes. Si par exemple les variétés X considérées sont polarisées, c'est-à-dire munies de la classe $h \in H^2(X,\mathbb{Z})$ d'un fibré ample, et si n est pair, le groupe $H^n(X,\mathbb{Z})$ possède un élément distingué $h^{n/2}$; on demandera que l'isométrie de Hodge φ respecte cet élément.[1]

---

(1) Cette convention n'est raisonnable que si $H^*(X,\mathbb{Q})$ est engendré par H^n et par les puissances de h . Ce sera le cas pour tous les exemples considérés dans la suite.

On peut reformuler le problème de Torelli comme suit. Soit L un $\mathbb{Z}$-module de type fini, muni d'une forme bilinéaire $(-1)^n$-symétrique Q_L. L'ensemble des structures de Hodge sur L compatibles avec Q_L est paramétré par une variété analytique D, le *domaine des périodes*, qui est un ouvert d'une variété de drapeaux de $L_{\mathbb{C}}$ (cf. [Gr 1] ou [De]). Soit $\tilde{\mathfrak{M}}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (X,σ), où X est une variété de $\mathfrak{M}$ et où $\sigma : H^n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ est une isométrie. A un tel couple est associée à l'aide de σ une structure de Hodge sur L, compatible avec Q_L, d'où une application $\tilde{\mathfrak{p}} : \tilde{\mathfrak{M}} \longrightarrow D$. Notons Γ le groupe d'automorphismes de (L,Q_L). On a $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}/\Gamma$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{M}} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{p}}} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{M} & \xrightarrow{\mathfrak{p}} & D/\Gamma \end{array}.$$

(Dans le cadre des variétés polarisées (cf. note (1)), si n est pair, on fixe un élément ℓ de L et on ne considère que les isométries $\sigma : H^n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ vérifiant $\sigma(h^{n/2}) = \ell$; on prend pour D l'espace des structures de Hodge sur L pour lesquelles $\ell \in H^{n/2,n/2}$, et pour Γ le groupe des automorphismes de (L,Q_L) fixant ℓ).

On dit que $\mathfrak{p}$ (ou $\tilde{\mathfrak{p}}$) est *l'application des périodes* pour $\mathfrak{M}$. Le théorème de Torelli équivaut à l'injectivité de $\mathfrak{p}$, le théorème de Torelli fin à celle de $\tilde{\mathfrak{p}}$. Dans les cas que nous considèrerons, $\mathfrak{M}$ et $\tilde{\mathfrak{M}}$ ont des structures naturelles d'espaces analytiques, ainsi que D et D/Γ, et les applications $\mathfrak{p}$ et $\tilde{\mathfrak{p}}$ sont holomorphes. Le *problème de Torelli infinitésimal* pour X est la question de savoir (2) si $\tilde{\mathfrak{p}}$ est une immersion en (X,σ), pour un choix quelconque de σ. Cette question est souvent appelée problème de Torelli local dans la littérature. Oort et Steenbrink suggèrent de réserver ce nom à la question analogue pour $\mathfrak{p}$. Avec cette terminologie, le théorème de Torelli infinitésimal entraîne le théorème local, mais la réciproque est fausse [O-S].

Enfin, lorsque $\mathfrak{M}$ est irréductible, on appelle *problème de Torelli générique* la question de savoir si $\mathfrak{p}$ est génériquement injective. Cette question s'est révélée plus facile à attaquer que le problème de Torelli global, cf. §6. Je ne connais pas d'exemple où $\mathfrak{p}$ soit génériquement injective mais pas injective.

2. Le cas des courbes

Pour une courbe (lisse, compacte) C, la donnée de la décomposition de Hodge

(2) A un grain de sel près ; voir §4 pour un énoncé précis.

$$H^1(C,\mathbb{Z}) \subset H^1(C,\mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$

est équivalente à celle de la jacobienne $J(C)$, munie de sa polarisation principale (en tant que tore complexe, $J(C)$ est le quotient de $H^{0,1}$ par l'image de $H^1(C,\mathbb{Z})$; la polarisation est définie par le cup-produit sur $H^1(C,\mathbb{Z})$) . Le théorème de Torelli revient donc à énoncer que deux courbes dont les jacobiennes (polarisées) sont isomorphes, sont elles-mêmes isomorphes. Sous cette forme, ce théorème a été démontré par Torelli en 1913 [To]. De nombreuses démonstrations différentes en ont été données par la suite : outre la démonstration originale de Torelli (étendue en toute caractéristique dans [Ma]), citons celles de Comessatti [Co] (dont on trouvera un exposé moderne dans [Ci]), d'Andreotti [A], de Weil [W] (voir aussi [D] pour une version très simple), de Martens [M], de Saint-Donat [S-D], de Green [G 1] .

Toutes ces démonstrations sont de nature géométrique, basées sur les propriétés très particulières du diviseur Θ d'une jacobienne. Indiquons par exemple la recette donnée par Green : pour tout point singulier de Θ , on peut regarder par translation le cône tangent à Θ comme une hypersurface dans l'espace projectif tangent de la jacobienne à l'origine ; l'intersection de ces cônes tangents n'est autre que la courbe C (à vrai dire ceci n'est correct que si C n'est pas hyperelliptique, trigonale ou plane de degré 5; on traite facilement ces cas particuliers par une méthode ad hoc).

Certaines de ces démonstrations donnent un théorème de Torelli fin : si C , C' sont deux courbes et $\varphi : H^1(C,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(C',\mathbb{Z})$ une isométrie de Hodge, il existe un isomorphisme $u : C' \longrightarrow C$ tel que $u^* = \pm\varphi$. Notons $\mathfrak{M}_g$ l'espace des modules des courbes de genre g , $\tilde{\mathfrak{M}}_g$ l'espace des courbes C de genre g munies d'une base symplectique de $H^1(C,\mathbb{Z})$, H_g le demi-espace de Siegel , Γ le groupe $Sp(2g,\mathbb{Z})$; le diagramme du § 1 devient ici

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{M}}_g & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{p}}} & H_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{M}_g & \xrightarrow{\mathfrak{p}} & H_g/\Gamma \end{array} .$$

On déduit de ce qui précède que $\mathfrak{p}$ est injective, tandis que $\tilde{\mathfrak{p}}$ est de degré 2 sur son image, ramifiée le long des courbes hyperelliptiques. De plus Oort et Steenbrink ont prouvé que $\mathfrak{p}$ est un plongement [O-S].

Le problème de Torelli pour les courbes est donc bien compris. Un problème très lié, mais plus difficile, est celui de déterminer l'image de $\mathfrak{p}$: c'est le *problème de Schottky,* qui a connu récemment de très beaux développements.

3. Le théorème de Torelli global : quelques cas connus.

a) *Les variétés qui ressemblent à des courbes*

J'entends par là les variétés de dimension impaire $2p+1$, pour lesquelles la décomposition de Hodge se réduit à

$$H^{2p+1}(X,\mathbb{C}) = H^{p+1,p} \oplus H^{p,p+1} \quad .$$

La donnée de la structure de Hodge sur $H^{2p+1}(X,\mathbb{Z})$ équivaut donc à celle d'une variété abélienne principalement polarisée, la *jacobienne intermédiaire* $J(X)$; le problème de Torelli consiste à demander si celle-ci détermine X . Un exemple célèbre est celui de l'hypersurface cubique de dimension 3, traité par Clemens et Griffiths [Cl-G], et indépendamment par Tjurin [Tj 1]. Voici une manière simple d'énoncer leurs résultats [B1] : si X est une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^4$, le diviseur Θ de $J(X)$ a un seul point singulier, de multiplicité 3 ; la base du cône tangent à Θ en ce point s'identifie à X . On en déduit sans peine un théorème de Torelli fin : étant données deux cubiques X , X' et une isométrie de Hodge $\varphi : H^3(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(X',\mathbb{Z})$, il existe un isomorphisme $u : X' \longrightarrow X$ tel que $u^* = \pm\varphi$.

Un autre exemple, nettement plus facile, est fourni par les intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{2p+3}$ ([R],[Tj 2] . Les équations d'une telle variété, supposée lisse, s'écrivent dans un système de coordonnées convenable

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{2p+3} X_i^2 = 0 \quad ; \quad \sum_{i=0}^{2p+3} \lambda_i X_i^2 = 0 \; .$$

Le sous-ensemble $\{\lambda_o,\ldots,\lambda_{2p+3}\}$ de $\mathbb{P}^1$ est bien déterminé à l'action de $PGL(2)$ près. La jacobienne intermédiaire de X s'identifie à la jacobienne de la courbe hyperelliptique C obtenue comme revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié en $\lambda_o,\ldots,\lambda_{2p+3}$. Par le théorème de Torelli pour les courbes, $J(X)$ détermine C , donc les points $\lambda_o,\ldots,\lambda_{2p+3}$, donc les équations (*).

Le très beau travail de Clemens-Griffiths donne envie de le généraliser, par exemple aux variétés de Fano (variétés de dimension 3 dont l'inverse du fibré canonique est ample), telles que la quartique de $\mathbb{P}^4$, l'intersection de 3 quadriques, etc... Mais l'extension à ces variétés du programme de [Cl-G] s'est révélée singulièrement difficile. De fait, à ce jour aucun autre exemple de ce type n'est connu. Le miracle de la cubique est qu'on arrive à paramétrer explicitement le diviseur Θ par une famille de cycles (les différences de droites, ou les cubiques gauches) ; on ne sait pas le faire pour d'autres variétés. Signalons cependant que le théorème de Torelli *générique* est connu dans quelques cas : pour la quartique de $\mathbb{P}^4$, cela résulte du théorème de Donagi (§6); pour les intersections de trois quadriques