

Astérisque

JEAN BELLISSARD

Le papillon de Hofstadter

Astérisque, tome 206 (1992), Séminaire Bourbaki, exp. n° 745, p. 7-39

http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__7_0

© Société mathématique de France, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE PAPILLON DE HOFSTADTER
[d'après B. Helffer et J. Sjöstrand]

par Jean BELLISSARD

1. ÉLECTRONS DE BLOCH EN CHAMP MAGNÉTIQUE

Le papillon de Hofstadter auquel est consacrée cette contribution, est lié à la description du mouvement d'un électron cristallin plongé dans un champ magnétique uniforme. Ce problème est l'un de ceux qui a mobilisé le plus de physiciens du solide durant ce siècle, au point qu'une bibliographie devrait comporter un minimum de 200 articles essentiels, signés par les plus grands noms de ce domaine. Il n'est pas question d'en donner ici la liste, encore que l'histoire du sujet vaille sans doute la peine d'être écrite. Néanmoins, il est utile d'en retenir quelques points.

La première contribution à cette question est due à Landau [LA], qui, en 1930, donna pour la première fois le calcul du spectre d'énergie d'un électron libre dans un champ magnétique uniforme. Ce fut Peierls [PE] en 1933 qui jeta les bases de la théorie des électrons cristallins dans un métal soumis à un champ magnétique uniforme, et qui montra que la contribution des électrons de conduction à la susceptibilité magnétique était diamagnétique. Dans un cristal de dimension D , en l'absence de champ magnétique et en négligeant les interactions coulombiennes, les électrons de conduction sont décrits comme des particules indépendantes dont l'énergie est donnée par une ou plusieurs fonctions $E(\vec{k})$ du vecteur "quasi-moment" \vec{k} , périodique par rapport au groupe de symétrie du réseau réciproque du cristal considéré. Le quasi-moment représente, à une constante physique

près, la quantité de mouvement de la particule. Ces fonctions sont appelées “fonctions de bande”. Des considérations liées à la statistique de Fermi-Dirac montrent que seuls les porteurs de charges d’énergie proche du niveau de Fermi contribuent au transport de courant. Ainsi dans les cas les plus simples une seule fonction de bande suffit, tandis qu’en général, il en faudra un nombre fini, rarement supérieur à trois. Sachant que les champs magnétiques créés en laboratoire sont toujours beaucoup trop faibles pour produire des effets importants, Peierls proposa de décrire le mouvement de l’électron en présence d’un champ magnétique uniforme au moyen de l’opérateur Hamiltonien H obtenu en substituant au quasi-moment \vec{k} dans la fonction de bande, l’opérateur $\vec{K} = (\vec{P} - e\vec{A})/\hbar$, expression dans laquelle $\vec{P} = -\frac{i}{\hbar}\vec{\nabla}$ représente l’opérateur d’impulsion, tandis que \vec{A} représente le potentiel vecteur magnétique relié au champ magnétique \vec{B} par $\text{rot}(\vec{A}) = \vec{B}$.

La première justification de cette substitution fut l’objet d’un article de Luttinger [LU] en 1950, qui adapta à ce problème une méthode développée par Slater pour traiter les impuretés dans un cristal. Cet article fut le début d’une production abondante de travaux durant les années cinquante, consacrés à la construction de Hamiltoniens effectifs plus ou moins réalistes tenant compte de l’influence du champ magnétique. Parmi ces contributions, celle de Harper [HA], parue en 1955, propose un modèle simplifié susceptible de fournir une description qualitativement correcte du mouvement des porteurs de charge. Sachant que seul le mouvement perpendiculaire au champ magnétique est affecté par ce dernier, Harper se restreint à un problème bidimensionnel dans lequel $\vec{K} = (K_1, K_2)$. En outre, il ne retient dans la fonction de bande que les termes d’ordre les plus bas de son développement de Fourier. Pour un cristal carré, il obtient donc le Hamiltonien suivant:

$$(1) \quad H = 2t\{\cos(K_1) + \cos(K_2)\}$$

où t , appelé “transfert” ou “intégrale d’échange”, représente l’énergie nécessaire à l’électron pour son transfert d’un site à l’autre du cristal. Le point remarquable, dans cette expression, est que cet opérateur, ainsi d’ailleurs que tout autre modèle construit par cette méthode, ne dépend que des

“translations magnétiques” [ZA], à savoir les deux opérateurs unitaires $U_i = e^{iK_i}$ ($i=1,2$) qui satisfont aux relations de commutation:

$$(2) \quad U_1 U_2 = e^{2i\pi\alpha} U_2 U_1 \quad \alpha = \frac{\phi}{\phi_0}$$

où $\phi_0 = \frac{h}{e}$ est le quantum du flux magnétique, h étant la constante de Planck, et e la charge de l'électron. Ces relations sont les relations de commutation canoniques à condition de remplacer la constante de Planck \hbar par le flux normalisé $2\pi\alpha$. Or, pour un cristal réaliste comportant une maille élémentaire de quelques Å plongé dans un champ de quelques Teslas, ce flux normalisé est de l'ordre de 10^{-7} à 10^{-9} . Nous travaillerons dans ce cas dans le régime semi-classique avec une excellente approximation.

La justification mathématique de la substitution de Peierls a été apportée par [BE1, HS0] qui ont pu montrer que les électrons d'énergie proche du niveau de Fermi, sont décrits exactement par un Hamiltonien effectif construit comme une matrice de dimension finie dont les coefficients sont des séries convergentes de monômes dans les translations magnétiques. Ainsi, le modèle de Harper ne constitue-t-il que l'approximation à une bande la plus simple du Hamiltonien effectif décrivant les électrons de conduction.

Le calcul du spectre du modèle de Harper a lui-même une longue histoire. En effet, la présence du champ magnétique brise l'invariance par translation, interdisant le recours au théorème de Bloch pour son calcul. Les méthodes semi-classiques furent utilisées dès la fin des années cinquante pour décrire l'influence du réseau cristallin sur les niveaux de Landau. Cependant, les physiciens avaient aussi remarqué que lorsque le flux normalisé était un rationnel, le Hamiltonien redevenait périodique, si bien que l'on pouvait utiliser la théorie de Bloch dans ce cas. Alors en approximant α par un suite convenable de rationnels il devenait possible de calculer le spectre avec une précision croissante. Ce programme fut mis en oeuvre pour la première fois par Chambers [CH] en 1965, mais il ne calcula le spectre que pour un tout petit nombre de valeurs du flux estimant qu'il n'était pas nécessaire d'aller plus loin, ratant ainsi l'aspect le plus spectaculaire de ce problème, à savoir le caractère fractal du spectre comme fonction du flux. Il fallut attendre 1976, et la thèse de Hofstadter [HO] pour en apercevoir pour la première fois la structure (cf. Fig. 1)...en forme de papillon...fractal.

Il est remarquable de constater que le modèle de Harper ou ses dérivés furent redécouverts et employés dans des situations physiques très variées par plusieurs autres physiciens. En 1978, Aubry [AU] l'utilisa pour décrire la physique des chaînes unidimensionnelles spontanément modulées par le phénomène appelé "transition de Peierls". Dans les années quatre-vingts, à la suite de travaux dus à de Gennes [GE] et Alexander [AL] sur les réseaux de supraconducteurs, Rammal et plusieurs de ses collaborateurs montrèrent théoriquement et expérimentalement que le modèle de Harper permettait de décrire la courbe de transition métal normal-supraconducteur d'un réseau carré de fils supraconducteurs. En particulier la quantification du flux aux valeurs rationnelles du quantum de flux fut mise en évidence expérimentalement [PCR]. Ce modèle fut aussi utilisé pour comprendre la théorie de l'effet Hall quantique [TKN2] découvert en 1981 par von Klitzing et al. [KL]. Enfin tout récemment, ce modèle et ses dérivés sont devenus un passage obligé pour comprendre la théorie de la supraconduction à haute température dans les oxydes de cuivre supraconducteurs [RB1]. Le lecteur intéressé pourra trouver quelques informations dans [BE2].

2. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DU MODÈLE DE HARPER

Dans ce paragraphe, nous considérons maintenant le modèle de Harper modifié comme suit:

$$(3) \quad H(\alpha, \mu) = U_1 + U_1^{-1} + \mu(U_2 + U_2^{-1})$$

où les opérateurs U_i sont unitaires et satisfont à l'équation (2) avec $\alpha = \frac{\phi}{\phi_0}$, et μ un nombre réel. Ce modèle sera désigné sous le nom de "Mathieu discret" dans la suite. Celui de Harper correspond à $\mu = 1$. Rappelons que le spectre d'un opérateur H est l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z - H)$ n'admette pas d'inverse borné. Le spectre est un sous ensemble fermé du plan complexe. Pour un opérateur quelconque (resp. autoadjoint, unitaire), le spectre est contenu dans \mathbf{C} (resp. dans \mathbf{R} , dans le cercle unité) et nous conviendrons d'appeler "gap" les composantes connexes du complémentaire du spectre dans \mathbf{C} (resp. dans \mathbf{R} , dans le cercle unité).