

Astérisque

NICHOLAS M. KATZ

Sommes exponentielles

Astérisque, tome 79 (1980)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__79__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__79__1_0)

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AVANT-PROPOS

Je voudrais remercier le département de mathématiques de l'Université de Paris-Sud (Orsay), en particulier L. Illusie et M. Raynaud, de m'avoir invité et de m'avoir donné l'occasion de faire un cours sur les sommes exponentielles, à l'automne 1979.

Mon intérêt dans les questions traitées ici a été beaucoup stimulé par des conversations et des échanges de lettres avec C. Hooley. Je lui en suis très reconnaissant. Ce que je dois à P. Deligne est plus long à détailler ; à part ses résultats fondamentaux sur lesquels tout ce travail est bâti, c'est lui qui m'a appris l'astuce technique mais essentielle de voir un faisceau comme extension de son quotient "non-ponctuel" par son sous-faisceau "ponctuel" (cf. chapitre 4).

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans la rédaction qu'en a faite G. Laumon. Je l'en remercie avec grand plaisir. Je remercie également Madame Bonnardel qui a réalisé la frappe du manuscrit. Ces remerciements seraient incomplets si je n'exprimais ici ma reconnaissance à l'I.H.E.S. pour son hospitalité et son soutien pendant l'élaboration de ce travail.

Nicholas M. Katz

TABLE DES MATIÈRES

1 - INTRODUCTION

- 1.0. Une motivation générale.
- 1.1. Equations dans les corps finis et sommes trigonométriques.
- 1.2. Exemple : sommes de Kloosterman à une variable.
- 1.3. Sommes de Kloosterman multiples et équidistribution des sommes de Gauss.
- 1.4. Application de l'hypothèse de Riemann pour les courbes à un problème de distribution des résidus quadratiques.
- 1.5. Bonnes estimations des sommes exponentielles.

2 - FONCTIONS L ASSOCIÉES AUX SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES ET CONJECTURES DE WEIL

- 2.1. Fonctions L : définition et rationalité.
- 2.2. Estimation des valeurs absolues des S_n et conjecture de Weil.
- 2.3. Retour aux sommes trigonométriques : dépendance en p de $w(p)$.
- 2.4. Retour aux sommes de Kloosterman multiples.

3 - INTERPRÉTATION COHOMOLOGIQUE DES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

- 3.1. Énoncé d'un théorème d'uniformité en p .
- 3.2. Cohomologie ℓ -adique, fonctions zêta et conjectures de Weil.
- 3.3. Fonctions L et revêtements étales
- 3.4. Fonctions L et faisceaux ℓ -adiques
 - 3.4.1. Rappels sur le π_1 .
 - 3.4.2. Définition des E_λ -faisceaux.
- 3.5. Fonctions L et cohomologie des E_λ -faisceaux.
 - 3.5.1. Formule des traces et rationalité des fonctions L .
 - 3.5.2. Cohomologie à supports propres.
 - 3.5.3. Résumé du théorème fondamental de Deligne (Weil II).
 - 3.5.4. Applications aux sommes exponentielles.

4 - THÉORÈME D'UNIFORMITÉ POUR LA STRUCTURE COHOMOLOGIQUE DES SOMMES EXPONENTIELLES

- 4.1. La situation globale que l'on veut comprendre.
- 4.2. À quoi ressemble un E_λ -faisceau constructible sur $\mathbb{A}_R^1$.

TABLE DES MATIÈRES

- 4.3. Le théorème clef et ses conséquences.
 - 4.3.1. Énoncé du théorème clef et corollaires.
 - 4.3.2. Démonstration (modulo le théorème clef) des énoncés 2.3.1 et 3.1.1.
- 4.4. Description explicite d'un E_λ -faisceau constructible sur une courbe.
- 4.5. Cohomologie des E_λ -faisceaux constructibles sur les courbes.
- 4.6. Caractéristique d'Euler-Poincaré. Ramification sauvage.
- 4.7. Spécialisation de la cohomologie.
 - 4.7.1, 4.7.2, 4.7.3. Théorème de spécialisation.
 - 4.7.4. La filtration de la monodromie.
 - 4.7.5. L'analogue transcendant.
 - 4.7.6. Comparaison de la construction algébrique et de la construction transcendante.
- 4.8. Preuve du théorème clef
 - 4.8.1. Conséquences du théorème de spécialisation de la cohomologie.
 - 4.8.2. Lemme clef.
 - 4.8.3. Conséquences du lemme clef.
 - 4.8.4. Dernière étape.
- 4.9. Indépendance de la place λ .
 - 4.9.1. E-familles faibles et E-familles : sorites.
 - 4.9.2. E-familles sur les courbes.
 - 4.9.3. Le cas général.
 - 4.9.4. Applications aux questions d'indépendance.
 - 4.9.5. Question.
- 5 - ANALYSE PRÉCISE DE SOMMES EXPONENTIELLES DONT LA GÉOMETRIE EST TRÈS BELLE
 - 5.1. Introduction et énoncés des résultats.
 - 5.2. Preuve de 5.1.2.
 - 5.3. Preuve directe de la partie (0) du théorème 5.1.2 (méthode globale).
 - 5.4. Une variante du théorème 5.1.2.
 - 5.5. Applications aux sommes de Kloosterman et à diverses généralisations de ces sommes.