PIERRE COLMEZ

# Intégration sur les variétés $p$-adiques

*Astérisque*, tome 248 (1998)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__248__R1_0>

ASTÉRISQUE 248

# INTÉGRATION SUR LES VARIÉTÉS $p$-ADIQUES

Pierre Colmez

Société Mathématique de France 1998

*Pierre Colmez*

Département de mathématiques et informatique, École Normale Supérieure,
45 rue d'Ulm, 750005 Paris, France.

Équipe d'arithmétique, Institut de mathématiques,
Tour 46-56 -5ème étage- Boite 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 115, 14H, 14K, 14L, 30F, 30G, 32J.

***Mots clefs*.** — Intégrale abélienne, période complexe, période $p$-adique, extension universelle, variété abélienne, jacobienne, fonction de Green, fonctions thêta, hauteurs de Néron-Tate.

# INTÉGRATION SUR LES VARIÉTÉS $p$-ADIQUES

**Pierre Colmez**

***Résumé***. — Dans ce volume, nous montrons qu'il y a essentiellement une seule manière d'intégrer une 1-forme différentielle fermée sur une variété algébrique lisse définie sur un corps $p$-adique. Cette théorie de l'intégration $p$-adique, contrairement à celle développée par Coleman, ne suppose pas d'hypothèses de bonne réduction des variétés que l'on considère et permet d'étendre au cas général un certain nombre de théorèmes démontrés par Coleman dans le cas de bonne réduction ; en particulier, la construction des périodes $p$-adiques des variétés abéliennes et la loi de réciprocité pour les formes différentielles de troisième espèce sur les courbes. L'intérêt d'avoir une théorie qui marche pour tous les nombres premiers est de pouvoir adéliser certaines constructions. Par exemple, si $X$ est une courbe algébrique définie sur un corps de nombres, nous contruisons de manière purement analytique un accouplement sur les diviseurs de degré 0 de $X$ en utilisant des fonctions de Green adéliques et à partir duquel, on peut retrouver la hauteur de Néron-Tate et les hauteurs $p$-adiques construites par Gross et Coleman dans le cas de bonne réduction. Ce volume ne contient donc pas à proprement parler d'énoncé nouveau, mais essaie de faire la synthèse entre plusieurs points de vue ; en particulier, la construction adélique des hauteurs peut être vue comme une synthèse entre le point de vue de Néron et celui de Gross et Coleman.

***Abstract*** **(Integration on $p$-adic varieties)**. — We show that there is a unique "reasonable" way of integrating closed 1-forms on smooth algebraic varieties defined over a $p$-adic field. In contrast with the theory developed by Coleman, this $p$-adic integration does not require that the varieties under consideration have good reduction and can be used to extend to the general case several results obtained by Coleman in the case of good reduction ; in particular the construction of $p$-adic periods of abelian varieties and the reciprocity law for differentials of the third kind. Having a theory which works for all primes can be used to adelize certain constructions. For example, if $X$ is a smooth and proper algebraic curve defined over a number field, we define, in a purely analytic way, a pairing between divisors of degree 0 using adelic Green functions and from which one can recover the Néron-Tate height pairing and $p$-adic analogues considered by Gross and Coleman in the case of good reduction.

# Table des matières

# INTRODUCTION

## 1. Intégration $p$-adique sur les variétés $p$-adiques

Soit $K$ un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. Le principal problème de l'intégration $p$-adique est que la topologie $p$-adique est totalement discontinue et donc que l'équation différentielle $df = 0$ a beaucoup trop de solutions. Ce problème apparait déjà quand on veut définir le logarithme $p$-adique ; en effet, imposer la condition $d\operatorname{Log} t = \dfrac{dt}{t}$ ne définit Log qu'à addition d'une fonction localement constante près sur $K^*$ ; rajouter la condition $\operatorname{Log}(xy) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y$ détermine complètement Log sur $\mathscr{O}_K^*$, mais il nous reste la liberté de fixer arbitrairement la valeur de $\operatorname{Log} p$. Le choix naturel est de poser $\operatorname{Log} p = 0$, ce qui nous donne le logarithme d'Iwasawa que nous noterons $\log_p$, mais du simple point de vue de l'intégration $p$-adique, aucun choix ne semble vraiment meilleur qu'un autre. Nous allons donc considérer tous les choix possibles de logarithme simultanément en considérant $\operatorname{Log} p$ comme une variable et l'application Log comme une fonction localement analytique de $K^*$ dans $K_{\mathrm{st}} = K[\operatorname{Log} p]$. Remarquons que si on note $\mathscr{L}(K^*)$ le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K \oplus \mathbf{Q} \operatorname{Log} p$ de $K_{\mathrm{st}}$, alors Log est à valeurs dans $\mathscr{L}(K^*)$.

Le miracle est que le fait de fixer la valeur de $\operatorname{Log} p$ suffit à assurer l'existence et l'unicité d'une intégration naturelle sur les variétés algébriques lisses définies sur un corps $p$-adique (toutes nos variétés sont par convention géométriquement connexes) et ce, bien que la topologie $p$-adique soit totalement discontinue. Plus précisément, on a le théorème suivant :

***Théorème 1.*** — *Soit $K$ un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. Il existe une et une seule manière de définir l'intégration des 1-formes différentielles fermées sur les variétés algébriques lisses définies sur $K$ de telle sorte que :*

(i) *Si $X$ est une variété algébrique lisse définie sur $K$, $\omega$ est une 1-forme différentielle fermée sur $X$ et $a \in X(K)$, alors $F(x) = \int_a^x \omega$ est une fonction localement analytique de $x \in X(K)$ à valeurs dans $K_{\mathrm{st}}$ vérifiant $dF = \omega$.*

(ii) *Si $X$ est une variété algébrique lisse définie sur $K$, $\omega$ est une 1-forme différentielle fermée sur $X$ et $a, b, c$ sont 3 éléments de $X(K)$, alors $\int_a^c \omega = \int_a^b \omega + \int_b^c \omega$ (relation de Chasles).*