FABIEN MOREL

Théorie homotopique des schémas

Astérisque, tome 256 (1999)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1999__256__1_0>

ASTÉRISQUE 256

THÉORIE HOMOTOPIQUE DES SCHÉMAS

Fabien Morel

Société Mathématique de France 1999

Fabien Morel
Université Paris 7, UFR de Mathématiques, 2 place Jussieu, 75251 Paris
et
Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.
E-mail : `morel@riemann.math.jussieu.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 55U35, 13D15, 19E08, 19D25.
Mots clefs. — Abstract homotopy theory, schemes, K-theory.

THÉORIE HOMOTOPIQUE DES SCHÉMAS

Fabien Morel

Résumé. — Dans ce texte, nous proposons un cadre général pour appliquer les méthodes standard de théorie de l'homotopie à la catégorie des schémas lisses sur un schéma de base raisonnable. Nous montrons qu'un certain nombre de propriétés attendues sont satisfaites, par exemple concernant la K-théorie algébrique de ces schémas.

***Abstract* (Homotopy theory of schemes).** — In this text, we propose a general framework in order to apply standard method from homotopy theory to the category of smooth schemes over a reasonable base scheme. We show that some expected properties are satisfied, for example concerning algebraic K-theory of those schemes.

Table des matières

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Ce mémoire[1] est consacré à l'étude du point de vue homotopique de la catégorie des schémas. Plus précisément, notre objectif est de définir pour tout schéma raisonnable[2] k la catégorie homotopique $h(\mathcal{E}_k)$ des k-schémas lisses et de montrer que celle-ci joue pour les k-schémas lisses le rôle que joue la catégorie homotopique classique pour les variétés différentiables.

V. Voevodsky a proposé dans **[33, 35]**, indépendamment, une définition concurrente de la nôtre. On peut montrer que, tout au moins lorsque k est de dimension de Krull finie, les deux approches conduisent à des catégories homotopiques équivalentes. De façon consise, on peut dire que notre approche est combinatoire tandis que celle de Voevodsky est topologique, reposant sur la notion de faisceaux pour la topologie de Nisnevich **[26]**. C'est cette approche topologique qui est développée dans **[25]**.

L'étape suivante sera l'étude des « théories cohomologiques sur la catégorie des k-schémas lisses » ainsi que celle, intimement liée, de la catégorie homotopique *stable* sur k dont les objets sont les spectres au sens de la théorie de l'homotopie ; cette catégorie est triangulée et possède un « smash-produit » pour lequel la droite projective pointée $\mathbf{P}^1_k$ est inversible. Les exemples classiques de théories cohomologiques (cohomologie étale à coefficients de torsion première aux caractéristiques résiduelles, cohomologie de Betti associée à tout point complexe de k, cohomologie motivique (rationnelle) de Beilinson, cohomologie motivique de Suslin-Voevodsky) sont des théories cohomologiques « ordinaires » en ce sens qu'elles se factorisent par la catégorie triangulée des motifs mixtes sur k définie par Voevodsky **[34]** (au moins lorsque k est un corps de caractéristique 0). La K-théorie algébrique supérieure de Quillen **[28]** est le premier exemple (tout comme en topologie algébrique standard) de théorie cohomologique généralisée qui n'est pas ordinaire. Un des aboutissement du présent travail est d'une certaine façon la description du spectre de K-théorie algébrique qui se lit dans le théorème de périodicité 4.3.6.

---

[1] Ce texte est une version revue et corrigée de la prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu intitulée « Théorie de l'homotopie et motifs I : propriétés géométriques fondamentales » (1995).

[2] noethérien, séparé, admettant une famille ample, *cf.* l'appendice B.

Nous montrerons ailleurs, lorsque k est un corps dans lequel -1 est un carré, que la catégorie homotopique stable une fois tensorisée par $\mathbf{Q}$ contient de façon naturelle comme sous-catégorie pleine la catégorie des motifs rationnels sur k définie par Grothendieck à l'aide des correspondances de Chow entre k-variétés projectives lisses, ce qui confirme le principe, bien connu en topologie algébrique, qu'une fois tensorisées par $\mathbf{Q}$, les théories cohomologiques redeviennent toutes « ordinaires » (comme cela est illustré par le résultat de Grothendieck affirmant que le K_0 d'une variété lisse sur un corps, tensorisé par $\mathbf{Q}$ s'identifie à la somme directe de ses groupes de Chow tensorisés par $\mathbf{Q}$).

La catégorie $\mathcal{E}_k$ des k-espaces est la catégorie des foncteurs de la catégorie opposée de celle, notée $\mathcal{C}_k$, des k-schémas affines lisses vers la catégorie des ensembles. Elle possède, par sa définition, une certaine analogie avec la catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux (qui est la catégorie des foncteurs $\Delta^{op} \to \mathcal{E}ns$, Δ désignant la catégorie des « simplexes standard ») : on remplace les simplexes standard par les k-schémas affines lisses. C'est de cette analogie que l'on s'est inspiré pour définir au §2.2 la catégorie homotopique associée à celle des k-espaces. En effet, l'obstruction essentielle à faire de la théorie de l'homotopie dans la catégorie des k-espaces est qu'il n'existe pas de notion évidente d'équivalences faibles.

Pour parvenir à une telle notion, nous analysons la méthode de Gabriel et Zisman **[16]** et ensuite Quillen **[27]** pour définir la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux : on inverse dans $\mathcal{S}$ les *extensions anodines.* L'ensemble des extensions anodines est le plus petit ensemble de $\mathcal{S}$-morphismes vérifiant certaines propriétés bien connues, et contenant les applications $\Lambda^{n,r} \to \Delta^n$, $\Lambda^{n,r}$ désignant la réunion de toutes les faces du n-ème simplexe standard Δ^n sauf la r-ième.

En s'inspirant de cette technique, nous décrivons en appendice A.2.3 une méthode permettant d'associer à un quadruplet raisonnable

$$(\mathcal{E}, \Delta^\bullet, S, S_{an})$$

formé d'une catégorie $\mathcal{E}$, d'un objet cosimplicial $\Delta^\bullet$ de $\mathcal{E}$, d'un ensemble S de *cofibrations élémentaires* et d'un ensemble S_{an} *d'extensions anodines élémentaires* une théorie de l'homotopie, et en particulier une catégorie homotopique $h(\mathcal{E}, \Delta^\bullet, S, S_{an})$. L'ensemble des cofibrations élémentaires est en quelque sorte l'ensemble des « générateurs » de la théorie de l'homotopie et l'ensemble des extensions anodines élémentaires, celui des « relations ».

Les cofibrations élémentaires de la catégorie des k-espaces correspondent aux familles finies transverses d'immersions fermées vers un k-schémas affine lisse. Ce choix nous est apparu raisonnable par recoupement de diverses « bonnes » raisons. On peut déjà remarquer que les faces du k-espace affine de dimension n -lorsqu'on l'interprète comme la réalisation géométrique sur k du n-ème simplexe standard- sont transverses. De plus toute immersion fermée entre k-schémas affines lisses est transverse d'après un résultat classique **[15**, corollaire 17.12.2 d], et une immersion fermée entre variétés algébriques affines lisses sur $\mathbf{C}$ induit un plongement propre de variétés différentiables qui est «triangulable» (contrairement à l'application induite par une immersion ouverte par exemple) et est donc un bon candidat pour être une «cofibration» (penser à la notion de C.W.-complexe relatif). Nous avons également été influencé par le principe suivant énoncé par Jouanolou pour k un corps **[18]** et généralisé par Thomason pour k arbitraire (voir l'appendice B) : «un k-schéma» raisonnable a le type d'homotopie faible d'un k-schéma affine; en quelque sorte, nous avons concrétisé ce principe en affirmant que tout type d'homotopie se «fabrique»à partir de k-schémas affines lisses. Enfin, la dernière raison, et non la moindre, qui a guidé notre choix des cofibrations élémentaires : le résultat technique mais fondamental du §4.1.10, qui nous a permis d'établir que lorsque k est affine (nœthérien) régulier, l'espace projectif infini, la grassmannienne infinie, le groupe multiplicatif et le groupe linéaire infini sont fibrants (dans la terminologie de Quillen).

La liste des extensions anodines élémentaires que nous dressons (§2.2.8) traduit deux types de propriétés :

invariance par homotopie : correspondant aux extensions anodines fondamentales simpliciales (*cf.* 2.2.1) qui traduisent essentiellement que les sections nulles : $X \to X \times \mathbf{A}^1$ sont des équivalences faibles;

excision homotopique : correspondant aux extensions anodines fondamentales géométriques (*cf.* 2.2.8) qui traduisent essentiellement que les carrés fondamentaux de k-schémas lisses (2.2.7) sont homotopiquement cocartésiens (voir le théorème 3.1.2).

Le slogan est donc que ces propriétés constituent le lien fondamental qui relie la géométrie à la théorie de l'homotopie. C'est d'ailleurs ce même slogan qui est développé par Voevodsky sous une forme différente. En effet, les carrés fondamentaux sont exactement ceux qui permettent de définir les faisceaux pour la topologie Nisnevich **[25]**.

Variantes de la catégorie des k-espaces. — Nous avons cherché à définir la catégorie de k-espaces la plus petite. On pourrait aussi utiliser la «catégorie» $\mathcal{E}_k''$ des foncteurs $(\mathcal{S}c_k)^{op} \to \mathcal{E}ns$, $\mathcal{S}c_k$ désignant la catégorie des k-schémas. On peut également considérer la catégorie $\mathcal{E}_k'$ des foncteurs $(\mathcal{L}_k)^{op} \to \mathcal{E}ns$, $\mathcal{L}_k$ désignant cette fois la catégorie des k-schémas lisses. On peut alors montrer que ces catégories définissent la même catégorie homotopique si l'on applique la même méthode (même ensemble de cofibrations élémentaires, même ensemble d'extension anodines fondamentales).

On peut également considérer une sous catégorie pleine de $\mathcal{E}_k'$ (ou $\mathcal{E}_k''$) formée de faisceaux pour une certaine topologie de Grothendieck (Nisnevich **[26, 25]**, étale, cdh, h-topologie de Voevodsky, *etc.*). On prend cette fois pour ensemble de cofibrations élémentaires un ensemble de générateurs des monomorphismes (autrement dit les cofibrations sont alors exactement les monomorphismes) et pour extensions anodines élémentaires les «mêmes» que ci-dessus. La catégorie homotopique obtenue dépend