

Astérisque

PIERRE BERTHELOT

Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$ -modules

Astérisque, tome 279 (2002), p. 1-80

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2002__279__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2002__279__1_0)

© Société mathématique de France, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION À LA THÉORIE ARITHMÉTIQUE DES $\mathcal{D}$ -MODULES

par

Pierre Berthelot

Résumé. — Dans ce texte, qui est un résumé du cours fait au Centre Émile Borel au printemps 1997, nous expliquons comment étendre un certain nombre de résultats classiques de la théorie algébrique des modules sur les anneaux d’opérateurs différentiels, lorsque le schéma de base n’est pas nécessairement de caractéristique 0. Nous montrons en particulier comment se généralisent les résultats basés sur la cohérence, aussi bien dans le cas algébrique que pour les différents complétés que l’on est amené à introduire sur un schéma formel p -adique. Nous donnons enfin quelques résultats et conjectures sur la notion d’holonomie, pour les $\mathcal{D}$ -modules munis d’une action de Frobenius.

Introduction

Ce texte est un résumé du cours fait au Centre Émile Borel durant le semestre « Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques », au printemps 1997. Son but est d’expliquer comment s’étendent les résultats de base de la théorie des $\mathcal{D}_X$ -modules, *i.e.* des modules sur les anneaux d’opérateurs différentiels, lorsqu’on se place sur un schéma X lisse sur un schéma de base S qui n’est pas nécessairement de caractéristique 0. Nous nous limiterons ici aux grandes lignes de la théorie, en donnant les principaux énoncés, mais peu d’indications sur les démonstrations. Pour celles-ci, le lecteur se reportera notamment à la série d’articles [5], [8], [10], [11], auxquels ce résumé vise aussi à servir d’introduction générale.

Classification mathématique par sujets (2000). — 13N10, 14F10, 14F30, 14F40, 14G22, 16S32, 32C38.

Mots clefs. — Puissances divisées, opérateur différentiel, $\mathcal{D}$ -module, isocrystal, surconvergence, complexe parfait, opération cohomologique, cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline, cohomologie rigide, Frobenius, variété caractéristique, module holonome.

Pendant la préparation de cet article, l’auteur a bénéficié du soutien du programme TMR de la Communauté Européenne, dans le cadre du réseau *Arithmetic Algebraic Geometry* (Contrat n° ERBFMRXCT 960006).

L'objectif de cette théorie « arithmétique » des $\mathcal{D}$ -modules est de développer les outils nécessaires pour étudier au-delà de la caractéristique 0 la cohomologie de de Rham, et les cohomologies qui en dérivent : cohomologies cristalline, syntomique, rigide... et notamment pour traiter les « problèmes de coefficients » concernant ces cohomologies. Dans cette perspective, le cas où le schéma de base est un corps de caractéristique p , ou un quotient d'anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique, présente évidemment un intérêt particulier. Il s'agit alors de cohomologies dites « p -adiques », par opposition à la cohomologie étale ℓ -adique pour $\ell \neq p$, et, comme le soulignait Grothendieck dès le début [26], l'aspect le plus important de ces cohomologies est de rendre compte des phénomènes de p -torsion. Cette importance est aujourd'hui renforcée par le développement des théorèmes de comparaison avec la cohomologie étale p -adique, pour les schémas sur les corps locaux, dans la mesure où cette dernière est elle-même par construction une limite de cohomologies de p -torsion. C'est pourquoi nous nous intéresserons d'abord aux résultats valables lorsque S est un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -schéma, puis ensuite à ceux qu'on peut en déduire concernant les modules sur certains faisceaux d'opérateurs différentiels sur un schéma formel p -adique lisse $\mathcal{X}$. Précisons néanmoins que nous nous limiterons dans le présent résumé à la théorie des $\mathcal{D}$ -modules proprement dite, les applications cohomologiques elles-mêmes devant faire l'objet d'un article ultérieur.

La première étape, à laquelle est consacrée le chapitre 1, est donc de construire les faisceaux d'opérateurs différentiels qui apparaissent dans l'étude de la cohomologie de de Rham et de la cohomologie cristalline lorsque la base S n'est pas de caractéristique 0, faisceaux qui diffèrent alors du faisceau $\mathcal{D}_X \subset \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X)$ des opérateurs différentiels (relativement à S) au sens classique. En effet, bien que, sans aucune hypothèse sur S , le faisceau $\mathcal{D}_X$ soit défini pour tout morphisme lisse $f : X \rightarrow S$ (cf. [EGA, IV, 16.8]), la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{E}$ est en général plus faible que celle d'une structure de $\mathcal{D}_X$ -module à gauche, lorsque S n'est pas de caractéristique 0. De plus, un exemple classique dû à Grothendieck [26] montre que la connexion de Gauss-Manin sur la cohomologie de de Rham relative n'est pas induite en général par une structure de $\mathcal{D}_X$ -module à gauche.

La théorie des enveloppes à puissances divisées permet par contre de modifier la construction de [EGA, IV, 16.8] et fournit, sur une base S quelconque, un autre faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X^{(0)}$ sur X , engendré librement par les dérivations, et tel que la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathcal{O}_X$ -module soit équivalente à celle d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -module à gauche. Pour les $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -modules, on peut définir en toute généralité les opérations de base de la théorie des $\mathcal{D}$ -modules : image inverse exceptionnelle $f^!$, produit tensoriel externe $\boxtimes$, image directe f_+ , dual $\mathbb{D}$ (précisons que nos notations sont celles de Bernstein et Borel [17]). De plus, en remplaçant la notion de complexe borné à cohomologie cohérente par celle de complexe parfait [SGA6], qui en est la généralisation naturelle lorsque S n'est pas régulier, nous montrons que

ceux des théorèmes de stabilité de la théorie complexe qui ne font appel qu'à la notion de cohérence restent valables en toute généralité pour les $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -modules : la perfection est stable par $f^!$ pour f lisse, $\boxtimes$, f_+ pour f propre, $\mathbb{D}$.

Par contre, hors de la caractéristique 0, il n'existe pas au niveau des $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -modules de notion analogue à l'holonomie dans le cas complexe, qui permette d'assurer la stabilité par $f^!$ pour f quelconque. Cette situation est liée au fait que, hors de la caractéristique 0, la cohomologie de de Rham et la cohomologie cristalline diffèrent de la cohomologie étale ou de la cohomologie transcendante sur un point fondamental : ce ne sont pas des théories de nature topologique. En particulier, si S est de caractéristique p , et si $F : X \rightarrow X'$ est le morphisme de Frobenius relatif, l'homomorphisme F^* n'est pas un isomorphisme en cohomologie de de Rham ou cristalline – ce qui est du reste à l'origine de nombre d'applications parmi les plus importantes de ces cohomologies ! De même, l'image inverse par F d'un $\mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ -module cohérent $\mathcal{E}'$ n'est pas un $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -module cohérent, sauf si $\mathcal{E}'$ est cohérent sur $\mathcal{O}_{X'}$, ce qui est par ailleurs trop restrictif pour assurer la stabilité par image directe.

Par contre, on s'aperçoit qu'il existe un nouveau faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X^{(1)}$ agissant naturellement sur $F^*\mathcal{E}$, et on montre de plus que F^* est alors une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ -modules et $\mathcal{D}_X^{(1)}$ -modules [8] : ce théorème de descente apparaît comme une généralisation du théorème classique de Cartier établissant une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$ -modules et celle des $\mathcal{O}_X$ -modules munis d'une connexion intégrable à p -courbure nulle [34]. Ce procédé s'itère, et amène à introduire, pour tout schéma lisse sur une base où les entiers premiers à p sont inversibles, un système inductif de faisceaux d'opérateurs différentiels $(\mathcal{D}_X^{(m)})_{m \geq 0}$ indexé par $\mathbb{N}$, dont la limite est le faisceau usuel $\mathcal{D}_X$, et à étudier plus généralement les $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules [5].

Après quelques rappels sur les enveloppes à puissances divisées, généralisées par l'introduction de la notion de structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m , pour un entier $m \geq 0$ quelconque, le chapitre 1 présente la construction et les premières propriétés de base de ces faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Le faisceau $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est obtenu en dualisant les enveloppes à puissances divisées partielles nilpotentes de l'idéal diagonal de X dans $X \times_S X$, à la manière de [EGA, IV], et est appelé faisceau des opérateurs différentiels de niveau m . Ce chapitre s'achève avec l'interprétation de la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche (resp. à droite) en termes de stratifications (resp. co-stratifications) au sens de Grothendieck. Celle-ci est essentielle pour la théorie des $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules, non seulement pour mettre en évidence la nature cristalline des constructions (ce que nous ne discuterons pas ici, cf. [8] et [10]), mais aussi dans bien des cas pour munir un module donné d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module. En effet, les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ pour $m \geq 1$ ne sont pas engendrés par les seules dérivations, mais par les opérateurs d'ordre $\leq p^m$, et on ne dispose pas toujours de formules explicites donnant l'action de ces opérateurs.

Le chapitre 2, consacré aux opérations cohomologiques dans le cadre algébrique (et tout particulièrement modulo p^n), commence avec le théorème de descente par Frobenius mentionné plus haut. Ce théorème s'énonce en fait sur n'importe quel schéma S annulé par une puissance de p , muni d'un idéal quasi-cohérent $\mathfrak{a}$ contenant p et possédant une structure d'idéal à puissances divisées partielles de niveau m . Il est alors valable pour tout morphisme de S -schémas lisses $F : X \rightarrow X'$ dont la réduction modulo $\mathfrak{a}$ est une puissance F_{X_0/S_0}^s du morphisme de Frobenius relatif de la réduction de X , et il fournit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ -modules et celle des $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -modules [8]. Le reste du chapitre est consacré aux propriétés de base des quatre opérations fondamentales, et notamment au théorème de finitude pour les morphismes propres [10], et au théorème de dualité relative de Virrion ([49], [51]). Parmi ces résultats, il convient de souligner tout particulièrement la complète compatibilité du foncteur F^* à toutes les opérations (ce qui, dans les cas de f_+ et $\mathbb{D}$, repose sur le théorème de descente). Nous en verrons plus loin les conséquences.

Certaines propriétés sont par contre en défaut tant que l'on reste sur une base annulée par une puissance p^n fixée. On constate deux types de problèmes :

a) Certains énoncés ne sont vrais qu'à isogénie près. Par exemple, pour $m \geq 1$, le complexe de de Rham $\Omega_X^* \otimes \mathcal{D}_X^{(m)}$ n'est pas une résolution de ω_X , mais les faisceaux de cohomologie du cône sont annulés par une puissance fixe de p , indépendante de n .

b) Certains énoncés nécessitent en plus de changer de niveau dans le système inductif des faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$. C'est le cas par exemple de l'isomorphisme $\text{Id} \xrightarrow{\sim} u^!u_+$ lorsque u est une immersion fermée.

On est ainsi conduit à étudier les théories obtenues par passage à la limite à partir de la théorie algébrique du chapitre 2. Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique, de corps résiduel k . Le chapitre 3 est consacré au passage à la limite projective sur un $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse $\mathcal{X}$, de fibre spéciale X . On obtient ainsi pour tout m un faisceau d'opérateurs différentiels d'ordre infini $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, p -adiquement complet, qui reste un faisceau d'anneaux cohérent à sections noethériennes. Lorsqu'on veut étendre les opérations cohomologiques aux complexes de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -modules, il apparaît alors des difficultés techniques liées aux complétions. Pour obtenir les formules voulues lorsqu'on compose plusieurs foncteurs qui ne préservent pas nécessairement la cohérence (notamment la transitivité des images inverses et directes), on est amené à intégrer la complétion à la définition de ces foncteurs, et donc aussi à imposer une condition de complétion aux complexes avec lesquels on travaille. Nous appelons *quasi-cohérents* les complexes $\mathcal{E}$ de $D^-(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ tels que le complexe $\mathcal{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{E}$ soit à cohomologie quasi-cohérente, et que $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{E})$. Ces conditions sont vérifiées par les complexes bornés à cohomologie cohérente. On peut alors étendre à ces complexes les opérations cohomologiques étudiées précédemment, et en déduire