Astérisque

GEORGES MALTSINIOTIS

La théorie de l'homotopie de Grothendieck

Astérisque, tome 301 (2005)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__301__R1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__301__R1_0)

© Société mathématique de France, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRIQUE 301

LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE
DE GROTHENDIECK

Georges Maltsiniotis

Société Mathématique de France 2005

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

G. Maltsiniotis

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot,
Case Postale 7012, 2, place Jussieu, F-75251 Paris cedex 05, France.

E-mail : maltsin@math.jussieu.fr

Url : <http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/>

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20, 14F35, 18B25, 18F20, 18G10, 18G30, 18G50, 18G55, 55P10, 55P15, 55P60, 55Q05, 55U10, 55U35, 55U40.

Mots clefs. — Asphérique, catégorie test, colimite homotopique, ensemble simplicial, équivalence faible, extension de Kan homotopique, foncteur lisse, foncteur propre, homotopie, localisation, modélisateur, préfaisceau.

LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE DE GROTHENDIECK

Georges Maltsiniotis

Résumé. — Le but de ce livre est d'exposer la très belle théorie de l'homotopie développée par Grothendieck dans « À la poursuite des champs ». Il s'agit de caractériser les catégories de préfaisceaux qui permettent de modéliser les types d'homotopie, généralisant ainsi la théorie des ensembles simpliciaux. Les critères dégagés par Grothendieck montrent que de telles catégories, appelées des *modélisateurs élémentaires*, abondent. On expose une construction catégorique des extensions de Kan homotopiques à gauche, généralisant une construction des colimites homotopiques par Thomason. On étudie deux classes remarquables de foncteurs, les foncteurs *propres* et les foncteurs *lisses*, notions duales l'une de l'autre. Ces foncteurs sont caractérisés par des propriétés cohomologiques, inspirées des théorèmes de changement de base propre ou lisse, en géométrie algébrique.

Abstract (Grothendieck's homotopy theory). — The aim of this book is to explain the very beautiful homotopy theory developed by Grothendieck in "Pursuing Stacks". The question is to characterize categories of presheaves that modelize homotopy types, thus generalizing the theory of simplicial sets. The criteria discovered by Grothendieck show that there are pretty many such categories, called *elementary modelizers*. We describe a categorical construction of left homotopy Kan extensions, generalizing a construction of homotopy colimits by Thomason. We study two remarkable classes of functors, *proper* and *smooth* functors, these two notions being mutually dual. These functors are characterized by cohomological properties inspired by the proper or smooth base change theorem in algebraic geometry.

TABLE DES MATIÈRES

Préface	1
Introduction	3
La catégorie homotopique Hot	3
La définition simpliciale	4
La définition catégorique	5
La définition toposique	6
Les modélisateurs et les catégories test	7
Les foncteurs test	9
Les localisateurs fondamentaux	10
Les extensions de Kan homotopiques	13
La catégorie de modèles conjecturée par Grothendieck	14
Foncteurs propres, foncteurs lisses	15
Le plan du livre	16
Notations	18
1. La théorie des catégories test	19
1.1. Les localisateurs fondamentaux faibles	19
1.2. Les équivalences faibles dans une catégorie de préfaisceaux	29
1.3. Les catégories test faibles	34
1.4. Segments et homotopie dans une catégorie	39
1.5. Les catégories test	46
1.6. Les catégories test strictes	51
1.7. Les foncteurs test	56
2. Les localisateurs fondamentaux	71
2.1. Les propriétés élémentaires des localisateurs fondamentaux	71
2.2. Foncteurs d'intégration et de cointégration	80
2.3. Images directes et composés transfinis d'équivalences faibles	85
2.4. Catégories filtrantes et asphéricité	96

3. Théorie homotopique élémentaire des catégories	105
3.1. Colimites et extensions de Kan homotopiques	105
3.2. Morphismes propres, lisses	113
Bibliographie	131
Index des notations	133
Index Terminologique	137

PRÉFACE

Le but de ce livre est de rendre accessible la très belle théorie de l'homotopie de Grothendieck, telle qu'elle est développée dans « Pursuing Stacks » (« À la poursuite des champs »). Son origine est une suite d'exposés que j'ai faits au groupe de travail « Algèbre et topologie homotopiques » à l'Institut de Mathématiques de Jussieu. Les idées, notions, propositions, théorèmes, et démonstrations de ce travail sont fortement inspirés par le texte de Grothendieck. Néanmoins, un travail très important de déblayage, et de mise au point a été nécessaire. Dans un prochain volume d'Astérisque, qui peut être considéré comme la suite de cet ouvrage, Denis-Charles Cisinski prouve deux conjectures énoncées par Grothendieck, et poursuit le développement de la théorie. Il utilise pour cela les résultats de Grothendieck exposés dans le présent volume, et les techniques récentes de localisation des catégories de modèles de Quillen. Il s'inspire aussi grandement de la théorie des dérivateurs de Grothendieck, même si ce concept n'est pas explicitement utilisé.

La lecture de ce livre ne remplace évidemment pas celle de « Pursuing Stacks ». Son ambition est de rendre cette dernière plus facile, en donnant une exposition plus systématique (et plus « bourbachique ») des idées de Grothendieck. Tous les sujets traités dans « la poursuite » ne sont pas couverts par ces notes. En particulier, il n'est pas fait mention d'infini-groupeïdes, ni d'abélianisation, ou schématisation des types d'homotopie, et l'aspect toposique n'est considéré que dans l'introduction. En outre, la structure de journal « intime » mathématique, qui fait de « Pursuing Stacks » une lecture passionnante, pleine de surprises, et précieuse pour la compréhension de la genèse des concepts, est perdue.

Je voudrais remercier Alain Bruguières, Albert Burroni, Bruno Kahn, Bernhard Keller et Fabien Morel pour les innombrables discussions que j'ai eues avec eux, ainsi que tous les participants du groupe de travail « du mercredi soir ». Je voudrais plus particulièrement exprimer ma reconnaissance à Denis-Charles Cisinski pour notre longue et fructueuse collaboration autour de la thèse qu'il a préparée sous ma direction. Une

grande partie de ce livre a été écrite sur l'île de Patmos. Je voudrais exprimer ma gratitude à la famille Vamvakos qui m'héberge sur cette île, et m'épargne tout souci matériel.

Patmos, Paris, Port-en-Bessin, 1997-2005

INTRODUCTION

La catégorie homotopique Hot

La catégorie homotopique Hot est définie classiquement comme étant la catégorie dont les objets sont les CW-complexes, et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues entre CW-complexes. On démontre qu'on obtient une catégorie équivalente en localisant la catégorie $\mathcal{Top}$ de *tous* les espaces topologiques et applications continues, relativement aux équivalences faibles topologiques.

On rappelle que si M désigne une catégorie et W une partie de la classe $\text{Fl}(M)$ des flèches de M , il existe (quitte à éventuellement agrandir l'univers de base) une catégorie $W^{-1}M$ (localisée de M relativement à W) et un foncteur $\gamma : M \rightarrow W^{-1}M$ (foncteur de localisation) tel que pour tout $w \in W$, $\gamma(w)$ soit un isomorphisme de $W^{-1}M$, et qui sont universels pour cette propriété. Autrement dit, pour tout foncteur $F : M \rightarrow M'$ tel que pour tout $w \in W$, $F(w)$ soit inversible, il existe un unique foncteur $\tilde{F} : W^{-1}M \rightarrow M'$ tel que $F = \tilde{F}\gamma$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\gamma} & W^{-1}M \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & M' \end{array}$$

La catégorie $W^{-1}M$ est construite en inversant formellement les morphismes appartenant à W .

Si l'on note W_∞ la partie de $\text{Fl}(\mathcal{Top})$ formée des *équivalences faibles topologiques*, autrement dit, des applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que

- (a) $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ soit une application bijective,
- (b) pour tout $n \geq 1$, et tout $x \in X$, $\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ soit un isomorphisme de groupes,

alors la catégorie homotopique Hot est équivalente à la catégorie $W_\infty^{-1}\mathcal{Top}$.