Astérisque
291, 2004, p. 1–199

COHOMOLOGIE DES ESPACES DE MODULES DE GROUPES p-DIVISIBLES ET CORRESPONDANCES DE LANGLANDS LOCALES

par

Laurent Fargues

Résumé. — Dans cet article on démontre que la partie supercuspidale de la cohomologie de certains espaces de Rapoport-Zink de type E.L. et P.E.L. non-ramifiés associés à des groupes p-divisibles supersinguliers réalisent des correspondances de Langlands locales. Pour cela on démontre d'abord que l'on peut relier, via une suite spectrale de type Hochschild-Serre, la cohomologie de ces espaces à celle du tube rigide au dessus de la partie supersingulière de certaines variétés de Shimura de type P.E.L.. On montre ensuite que la partie supercuspidale en une place finie non-ramifiée de la cohomologie de la variété de Shimura est égale à celle de sa strate basique, en d'autres termes la cohomologie des strates non-supersingulières est induite parabolique, du moins du point de vue des caractères.

***Abstract* (Cohomology of moduli spaces of p-divisible groups and local Langlands correspondences)**

In this article we prove that the supercuspidal part of the cohomology of some E.L. and P.E.L. type unramified Rapoport-Zink spaces realizes local Langlands correspondences. For this we first prove a relation between the cohomology of those spaces and the one of the p-adic rigid tube over the supersingular locus of some P.E.L. type Shimura varieties. This relation is an Hochschild-Serre type spectral sequence. Then we prove that, at a finite unramified place, the supercuspidal part of the cohomology of the Shimura variety is equal to the one of the supersingular locus, that is to say the cohomology of non-supersingular stratum is parabolicaly induced, at least from the character point of view.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G35, 14L05, 11Fxx, 14G22.
Mots clefs. — Variétés de Shimura, groupes p-divisibles, espaces de Rapoport-Zink, correspondances de Langlands, cohomologie étale des espaces rigides.

INTRODUCTION

Motivation générale

Dans l'article [**56**] Langlands a prédit l'existence d'un lien entre les motifs de Grothendieck définis sur des corps de nombres et certaines représentations automorphes des groupes linéaires. Pour certaines formes modulaires un cas particulier bien connu de cette correspondance est réalisé dans la cohomologie des courbes modulaires. Plus généralement, soit G un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}$ possédant une donnée de Shimura (G,X). Langlands a donné une description conjecturale du motif découpé par une représentation automorphe Π de G dans la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G,X)$ en fonction du L-paramètre (conjectural) de Π ([**56**]).

Dans ce texte, nous démontrons des analogues locaux de cette conjecture en des places non-archimédiennes. Qu'entendons nous par analogue local ? En la place archimédienne de $\mathbb{Q}$ l'objet local équivalent naturel de la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G,X)$ est l'espace symétrique hermitien X uniformisant la variété analytique $\mathrm{Sh}(G,X)(\mathbb{C})$, tandis que les objets associés aux représentations automorphes de G sont les représentations irréductibles du groupe de Lie $G(\mathbb{R})$ au sens d'Harish-Chandra. Les travaux de Schmid étudient ainsi la contribution des séries discrète de $G(\mathbb{R})$ dans la cohomologie L^2 de X (l'analogue local de l'identification de l'action du groupe de Galois motivique consisterait dans ce cas à déterminer une structure de Hodge sur ces espaces de cohomologie). Les analogues non-archimédiens en un premier p de $\mathbb{Q}$ de l'espace symétrique X sont les espaces rigides p-adiques de Rapoport-Zink ([**68**]) uniformisant certains ouverts rigides des variétés de Shimura $\mathrm{Sh}(G,X)$ (ils ne sont pas définis pour tous les couples (G,X)).

Espaces de Rapoport-Zink

Pour comprendre la définition des espaces de Rapoport-Zink rappelons que la plupart des variétés de Shimura devraient se décrire comme des espaces de modules de motifs. L'espace X s'interprète ainsi comme la contrepartie locale archimédienne de ce point de vue puisque c'est un espace de modules de structures de Hodge. Supposons que les variétés $\mathrm{Sh}(G,X)$ s'interprètent comme espaces de modules de variétés abéliennes. Les espaces de Rapoport-Zink sont alors la contrepartie p-adique de ce point de vue : ce sont des espaces de modules de groupes p-divisibles munis de structures de niveaux.

Contrairement à X les espaces de Rapoport-Zink ne sont pas simplement connexes ; il s'agit d'une tour d'espaces rigides $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ indexée par les sous groupes compacts ouverts de $G(\mathbb{Q}_p)$ telle que si K' est un sous groupe compact ouvert de K, le morphisme de transition $\breve{\mathcal{M}}_{K'} \to \breve{\mathcal{M}}_K$ est un revêtement étale. Cette tour est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p)$. Un deuxième groupe algébrique p-adique entre en jeux, une forme intérieure d'un sous groupe de Levi de la forme intérieure quasi-déployée de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On le note J_b. Celui-ci agit sur chaque espace $\breve{\mathcal{M}}_K$ de manière compatible aux morphismes de transition. Le troisième groupe entrant en jeu est le groupe de Weil W_E d'une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$.

Esquisse des résultats

Considérons la cohomologie étale ℓ-adique à support compact au sens de Berkovich des $\breve{\mathcal{M}}_K$ pour un $\ell \neq p$,

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

Lorsque K varie celle ci est munie d'une action lisse de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times W_E$.

Les résultats principaux de ce texte concernent des espaces de Rapoport-Zink pour lesquels le groupe J_b est une forme intérieure de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Ce sont ceux qui uniformisent les strates supersingulières des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées définies dans [**46**]. Le premier résultat concerne le cas où $G(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{GL}_n(F)$ pour une extension $F|\mathbb{Q}_p$ non ramifiée, et $J_b = D^\times$ où D est une algèbre à division sur F. Soit JL la correspondance de Jacquet-Langlands qui associe à une représentation irréductible de $D^\times$ une représentation de la série discrète de $\mathbf{GL}_n(F)$. Soit ρ une représentation de J_b telle que $\mathrm{JL}(\rho)$ soit supercuspidale. Soit π une représentation supercuspidale de $G(\mathbb{Q}_p)$. D'après la correspondance de Langlands locale ([**34**]), à π est associé un certain L-paramètre ψ. Nous démontrons que $\rho \otimes \pi$ intervient virtuellement dans la somme alternée de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink si et seulement si $\check{\pi} = \mathrm{JL}(\rho)$. Nous démontrons qu'alors la représentation galoisienne découpée par $\rho \otimes \pi$ s'exprime simplement en fonction du L-paramètre ψ.

Nous démontrons le même type de résultat lorsque $G(\mathbb{Q}_p) = J_b = \mathbf{GL}_n(F)$, la correspondance de Jacquet-Langlands étant alors l'identité.

Nous démontrons également le premier cas de loi de réciprocité non abélienne locale construite géométriquement et associée à des groupes autres que des formes intérieures des groupes linéaires. Plus précisément, il s'agit du cas où $J_b = G(\mathbb{Q}_p) = GU(3)$ est le groupe de similitudes unitaires non ramifié en trois variables. Contrairement au cas précédents, les L-paquets de représentations de $GU(3)$ ne sont pas tous de cardinal 1. Le résultat est alors du même type que précédemment après sommation sur un tel L-paquet.

Conjectures de Kottwitz

Kottwitz a formulé une conjecture concernant la contribution d'une représentation « discrète » de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b$ dans les espaces de cohomologie $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ ainsi que de la représentation galoisienne associée ([**65**] et [**32**]). Il s'est basé pour cela sur la description conjecturale donnée par Langlands du motif, et en particulier de la représentation galoisienne dans la cohomologie ℓ-adique, associé à une représentation automorphe de G dans la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G,X)$, ainsi que sur la formule conjecturale d'Arthur pour la multiplicité d'une représentation automorphe dans un A-paquet discret de G. Les résultats de ce texte sont des cas particuliers de ces conjectures.

Énoncés précis

Les résultats principaux sont les suivants :

***Théorème* (théorèmes III.8.1.4 et III.8.1.5).** — *Soit (V,F,b,μ) une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple basique (I.2.2.1). Soit $E\subset\overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps reflex associé. Soient $\breve{\mathcal{M}}_K=\breve{\mathcal{M}}_K(b,\mu)$ les espaces de Rapoport-Zink associés (I.2.3.1).*

(1) *Supposons le groupe réductif J_b anisotrope modulo son centre, c'est-à-dire $J_b=D^\times$ pour une algèbre à division D sur F d'invariant calculé en fonction de μ. Notons JL la correspondance de Jacquet-Langlands. Soit π une représentation irréductible de J_b telle que JL(π) soit supercuspidale. L'égalité suivante est vérifiée dans le groupe de Grothendieck* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p)\times W_E)$

$$\sum_i(-1)^i\Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}(H^i_c(\breve{\mathcal{M}}_K\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\pi)\Big]_{\mathrm{cusp}}$$
$$=\pm[\mathrm{JL}(\pi)]\otimes[r_\mu\circ\widetilde{\sigma}_\ell(\mathrm{JL}(\pi))_{|E}]\ |.|^{\sum_\tau p_\tau q_\tau/2}$$

où $\widetilde{\sigma}_\ell$ la correspondance de Langlands locale « absolue » ℓ-adique pour le groupe linéaire (A.7.1) et r_μ la représentation du L-groupe associé (A.7.2) sur E.

(2) *Supposons le groupe réductif J_b égal à $G=\mathbf{GL}_n$. Soit π une représentation irréductible supercuspidale de J_b. Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p)\times W_E)$

$$\sum_i(-1)^i\Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}(H^i_c(\breve{\mathcal{M}}_K\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\pi)\Big]_{\mathrm{cusp}}=\pm[\pi]\otimes[r_\mu\circ\widetilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E}]\ |.|^{\sum_\tau p_\tau q_\tau/2}$$

Dans cet énoncé, la donnée de Rapoport-Zink locale est l'analogue non-archimédien local d'une donnée de Shimura.

***Théorème* (théorème III.8.2.2).** — *Soit $(F,*,V,\langle\bullet,\bullet\rangle,b,\mu)$ une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple basique (I.2.2.2). Supposons $[F{:}\mathbb{Q}_p]/2$ impair et* $\dim_F(V)=3$. *Soit $E\subset\overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps reflex associé. Soient $\breve{\mathcal{M}}_K=\breve{\mathcal{M}}_k(b,\mu)$ les espaces de Rapoport-Zink associés (I.2.3.2). Soit $\psi:W_{\mathbb{Q}_p}\to{}^LG$ une classe de conjugaison de L-paramètres vérifiant :* $\mathrm{im}(\psi)$ *n'est pas contenue dans ${}^LB$ pour un sous groupe de Borel B de G. Soit $\Pi(\psi)$ le L-paquet supercuspidal de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ associé (C.4.2). Rappelons que $J_b=G(\mathbb{Q}_p)=GU(3)$. L'égalité suivante est vérifiée dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbb{Q}_p)\times W_E)$

$$\sum_{\pi\in\Pi(\psi)}\Big[\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}\Big(H^\bullet_c(\breve{\mathcal{M}}_K\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\pi\Big)\Big]_{\mathrm{cusp}}=\pm\sum_{\pi\in\Pi(\psi)}[\pi]\otimes[r_\mu\circ\psi_{|W_E}]\ |.|^{\sum_\tau p_\tau q_\tau/4}$$

En particulier, si $\Pi(\psi)$ est stable la conjecture de Kottwitz ([**65, 32**]*) est vérifiée.*

Quelques rappels sur la méthode de Harris,Taylor et Boyer

Rapide historique. — Lubin et Tate avaient déjà considéré (mais formulé différemment bien sûr) le cas particulier $G = \mathbf{GL}_1$ pour lequel les espaces $\breve{\mathcal{M}}$ sont de dimension 0, et donné ainsi une construction géométrique de la loi de réciprocité locale d'Artin. Deligne, Drinfeld ([**20**], [**21**] par exemple) et Langlands se sont intéressés à des problèmes de modules plus généraux. Carayol a ensuite formulé dans [**11**] des conjectures concernant les espaces de déformation de Lubin-Tate de dimension supérieure. Ces conjectures ont été démontrées dans le cas des corps locaux de caractéristique p par Boyer ([**8**]). Harris et Taylor on alors démontré la conjecture de Langlands locale pour les groupes linéaires sur des extensions de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ en utilisant cette approche ([**34**]), puisque dans leur cas la représentation r_μ est la représentation standard du groupe linéaire.

Quelques points de [34]. — Pour comprendre la tactique utilisée pour démontrer nos théorèmes il nous faut rappeler brièvement certains points de ([**34**]). Harris et Taylor considèrent des espaces de déformation de $\mathcal{O}_F$-modules divisibles de dimension 1 et de hauteur g, munis d'une structure de Drinfeld de niveau m, et notés $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$ (ce sont des schémas formels). Avec les notations du théorème III.8.1.4 énoncé précédemment, cela correspond à un choix particulier du cocaractère μ. Les espaces $\breve{\mathcal{M}}_K$ associés sont alors une union disjointe infinie des fibres génériques au sens des espaces analytiques des $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$. Leur résultat est énoncé en termes de cycles évanescents ℓ-adiques au sens de Berkovich, cependant les résultats de la section 5.9 de cet article permettent de faire le lien avec la cohomologie à support compact des espaces analytiques $\breve{\mathcal{M}}_K$. Avec nos notations, ils démontrent que si ρ est une représentation de J_b telle que $\mathrm{JL}(\rho)$ est supercuspidale alors,

$$[\mathrm{Hom}_{J_b}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \widehat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho)] = [\mathrm{JL}(\rho)] \otimes [r_\ell(\mathrm{JL}(\rho))]$$

où $r_\ell(\mathrm{JL}(\rho))$ est une représentation ℓ-adique de W_F. Ils montrent alors que la correspondance définie sur les représentations supercuspidales

$$\pi \longmapsto r_\ell(\pi)$$

est une correspondance de Langlands locale tordue par un caractère non ramifié. Leur démonstration utilise certaines variétés de Shimura, dites « simples », possédant de bon modèles entiers en tout niveau. Elles paramètrent des variétés abéliennes A munies de structures additionnelles (polarisation, action d'une algèbre) et de structures de niveau définies en p en utilisant la théorie des structures de niveau de Drinfeld.

L'un des points clef est que celles-ci sont stratifiées par la classe d'isogénie du groupe p-divisible universel $A[p^\infty]$. La strate minimale, ou strate supersingulière, est de dimension 0, et le complété formel de la variété de Shimura le long de cette strate est uniformisé par une union disjointe de $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$. Un point clef de [**34**] remarqué par Boyer dans [**8**] dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules elliptiques et transposé par Harris