

458

ASTÉRISQUE

2025

REGULARIZED UNBALANCED OPTIMAL TRANSPORT
AS ENTROPY MINIMIZATION
WITH RESPECT TO BRANCHING BROWNIAN MOTION

A. Baradat & H. Lavenant

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 458, 2025

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD	Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL	Nicolas RESSAYRE
Eleonore DI NEZZA	Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU	Sylvia SERFATY
Alessandra IOZZI	Sug Woo SHIN
Eric MOULINES	
Antoine CHAMBERT-LOIR (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	http://www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 59 € (\$ 89)

Abonnement Europe : 818 €, hors Europe : 889 € (\$ 1 333)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2025

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-37905-211-8

doi:10.24033/ast.1247

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

458

ASTÉRISQUE

2025

REGULARIZED UNBALANCED OPTIMAL TRANSPORT
AS ENTROPY MINIMIZATION
WITH RESPECT TO BRANCHING BROWNIAN MOTION

A. Baradat & H. Lavenant

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Aymeric Baradat

Univ Lyon, CNRS, Université Claude Bernard Lyon 1, UMR5208, Institut Camille Jordan, F-69622 Villeurbanne, France

`baradat@math.univ-lyon1.fr`

Hugo Lavenant

Department of Decision Sciences, Bocconi University, Via Röntgen 1, 20136 Milan, Italy

`hugo.lavenant@unibocconi.it`

Soumis le 13 décembre 2021, accepté le 10 février 2023.

Mathematical Subject Classification (2010). – 49N15, 49Q22, 60H30, 60J80 ; 35K58, 46E30, 60G57.

Keywords. – Unbalanced optimal transport, branching Brownian motion, Schrödinger problem, entropic regularization.

Mots-clefs. – Transport optimal non équilibré, mouvement brownien branchant, problème de Schrödinger, régularisation entropique.

REGULARIZED UNBALANCED OPTIMAL TRANSPORT AS ENTROPY MINIMIZATION WITH RESPECT TO BRANCHING BROWNIAN MOTION

by

A. Baradat & H. Lavenant

Abstract. – We consider the problem of minimizing the entropy of a law with respect to the law of a reference branching Brownian motion under density constraints at an initial and final time. We call this problem the *branching Schrödinger problem* by analogy with the Schrödinger problem, where the reference process is a Brownian motion. Whereas the Schrödinger problem is related to regularized (a.k.a. entropic) optimal transport, we investigate here the link of the branching Schrödinger problem with regularized *unbalanced* optimal transport.

This link is shown at two levels. First, relying on duality arguments, the values of these two problems of calculus of variations are linked, in the sense that the value of the regularized unbalanced optimal transport (seen as a function of the initial and final measure) is the lower semi-continuous relaxation of the value of the branching Schrödinger problem. Second, we also explicit a correspondence between the competitors of these two problems, and to that end we provide a fine description of laws having a finite entropy with respect to a reference branching Brownian motion.

We investigate the small noise limit, when the noise intensity of the branching Brownian motion goes to 0: in this case we show, at the level of the optimal transport model, that there is convergence to optimal partial transport. We also provide formal arguments about why looking at the branching Brownian motion, and not at other measure-valued branching Markov processes, like superprocesses, yields the problem closest to optimal transport. Finally, we explain how this problem can be solved numerically: the dynamical formulation of regularized unbalanced optimal transport can be discretized and solved via convex optimization.

Résumé (De la minimisation entropique par rapport au mouvement brownien branchant au transport optimal non équilibré et régularisé). – Nous considérons le problème consistant à minimiser l'entropie relative d'une loi par rapport à la loi d'un mouvement brownien branchant de référence, sous des contraintes de densité aux temps extrêmes. Nous appelons ce problème le problème de Schrödinger branchant, par analogie avec le problème de Schrödinger classique, où le processus de référence est un

mouvement brownien standard. Alors que le problème de Schrödinger classique est lié au transport optimal régularisé (également appelé transport optimal entropique), nous étudions ici le lien entre le problème de Schrödinger branchant et le transport optimal non équilibré et régularisé.

Ce lien se manifeste à deux niveaux. Tout d'abord, nous montrons par des arguments de dualité que les valeurs de ces deux problèmes de minimisation sont intimement liées : en effet, la valeur du transport optimal non équilibré et régularisé (considérée comme une fonction de la densité initiale et de la densité finale) correspond à la relaxation semi-continue inférieurement de la valeur du problème de Schrödinger branchant. Ensuite, nous établissons une correspondance explicite entre les compétiteurs de ces deux problèmes. Pour cela, nous donnons une description détaillée des lois ayant une entropie finie par rapport à un mouvement brownien branchant de référence.

Nous étudions également la limite de bruit nul, lorsque la diffusivité du mouvement brownien branchant tend vers zéro. Dans ce cas, nous montrons que notre modèle de transport optimal converge vers le transport partiel optimal. Nous présentons aussi des arguments formels expliquant pourquoi si l'on veut obtenir un problème qui se rapproche du transport optimal, l'étude du mouvement brownien branchant est plus adaptée que celle d'autres processus de Markov à valeurs mesures tels que les super-processus.

Enfin, nous expliquons comment ce problème peut être résolu numériquement : la formulation dynamique du transport optimal non équilibré et régularisé peut être discrétisée et résolue en utilisant des outils d'optimisation convexe.

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. Optimal transport	3
1.2. The Schrödinger problem and its link with regularized optimal transport	4
1.3. The branching Schrödinger problem	7
1.4. A duality argument for the equivalence between the models	10
1.5. Overview of the contributions of the article	14
Acknowledgements	18
2. Objects of interest and preliminary results	19
2.1. Notations	19
2.2. Models of regularized unbalanced optimal transport	21
2.3. The branching Brownian motion	38
2.4. The entropy functional and the branching Schrödinger problem	53
3. Equivalence of the values: a proof by duality	61
3.1. Statement of the results	61
3.2. Proof of Theorem 3.2, the static case	63
3.3. On the link between solutions of FKPP and the branching Brownian motion	64
3.4. Proof of Theorem 3.3, the dynamical case	69
3.5. Examples and counterexamples for the branching Schrödinger problem	73
4. Laws of finite entropy w.r.t. a branching Brownian motion	79
4.1. Preliminaries on discontinuous stochastic calculus	81
4.2. Two types of processes defined upon the branching Brownian motion	85
4.3. Branching Brownian motions with predictable and space-time dependent parameters	89
4.4. A process with finite entropy w.r.t. a BBM is a BBM	97
5. Equivalence of the competitors	109
5.1. Statement of the main result	110
5.2. Another proof of Theorem 3.3 under additional assumptions	111
5.3. Optimizing the entropic cost at fixed growth rate	112
5.4. From branching Schrödinger to RUOT	113
5.5. From RUOT to branching Schrödinger: the static case	116
5.6. From RUOT to branching Schrödinger: the dynamical case	122