Bulletin de la S. M. F.

Hervé Pajot

Conditions quantitatives de rectifiabilité

Bulletin de la S. M. F., tome 125, n° 1 (1997), p. 15-53
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_1_15_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 15–53.

CONDITIONS QUANTITATIVES DE RECTIFIABILITÉ

PAR

HERVÉ PAJOT (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons une condition suffisante et quantitative de rectifiabilité pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de d-mesure de Hausdorff finie grâce à des versions L^q de la fonction β de Peter Jones. Pour cela, nous démontrons, dans un premier temps, que cette condition est en fait nécessaire et suffisante pour les ensembles Ahlfors-réguliers (de dimension d) de $\mathbb{R}^n$, puis nous traitons le cas général en établissant des théorèmes de recouvrement par des ensembles Ahlfors-réguliers.

ABSTRACT. — We give a sufficient and quantitative condition of rectifiability for the subsets of $\mathbb{R}^n$ of finite d-dimensional Hausdorff measure using L^q-versions of Peter Jones' β-functions. We first prove that this condition is necessary and sufficient for the Ahlfors-regular sets (with dimension d) of $\mathbb{R}^n$, then the general case follows from covering theorems by Ahlfors-regular sets.

1. Introduction

Grâce à la théorie de Littlewood-Paley, il est possible de relier la régularité d'une fonction à certaines estimations L^2. Un exemple simple est le théorème de Stein et Zygmund (voir [St] ou [StZ]) : une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet une dérivée en presque tout point d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si et seulement si en presque tout point $x \in E$, on a

$$f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = \mathrm{O}(|t|) \quad \text{si} \quad t \to 0 \tag{1}$$

et

$$\int_{|t|\leq\delta} \Big| \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} \Big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty. \tag{2}$$

Plus récemment, il a été tenté, afin de traiter certains problèmes d'analyse harmonique, de relier la géométrie d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

(*) Texte reçu le 13 novembre 1995, révisé le 3 juin 1996, accepté le 25 septembre 1996.
Hervé PAJOT, Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay CEDEX (France) ; email : herve.pajot@math.u-psud.fr et Université de Cergy-Pontoise, Pôle Sciences et Techniques, Mathématiques, 2, av. Adolphe Chauvin, Pontoise 95302 Cergy-Pontoise CEDEX (France) ; email : pajot@u-cergy.fr

Classification AMS : 28 A 75 .

à certaines estimations L^2. Le but de cet article est de donner des conditions quantitatives de rectifiabilité pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ en s'inspirant des résultats de P.W. Jones pour les ensembles de dimension 1 et de G. David et S. Semmes pour les ensembles Ahlfors-réguliers de dimension $d \geq 1$ (voir section 2).

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$; par la suite, d désignera toujours un entier positif inférieur à n (en quelque sorte, d est la dimension de E).

On note H^d la d-mesure de Hausdorff.

On considère les fonctions β_q de Jones définies comme suit :

$$(3)\qquad \beta_\infty(x,t,E) = \inf_P \sup_{y\in E\cap B(x,t)} \Big(\frac{\operatorname{dist}(y,P)}{t}\Big) \quad \text{si } E\cap B(x,t)\neq\emptyset,$$

$$(4)\qquad \beta_\infty(x,t,E) = 0 \qquad\qquad \text{si } E\cap B(x,t)=\emptyset.$$

De plus, si $1 \leq q < +\infty$,

$$(5)\qquad \beta_q(x,t,E) = \inf_P \Big(\frac{1}{t^d}\int_{y\in E\cap B(x,t)} \Big(\frac{\operatorname{dist}(y,P)}{t}\Big)^q \mathrm{d}H^d(y)\Big)^{1/q}$$

où les inf sont pris sur tous les d-plans P de $\mathbb{R}^n$. Les fonction β_q mesurent dans toute boule la qualité de l'approximation de E par des d-plans.

Soit q tel que :

$$(6)\qquad 1 \leq q \leq \infty \qquad \text{si } d = 1,$$

$$(7)\qquad 1 \leq q < \frac{2d}{d-2} \qquad \text{si } d \geq 2.$$

Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ compact avec $H^d(E) < +\infty$. On suppose qu'en H^d presque tout point $x \in E$, on a les propriétés suivantes :*

$$(8)\qquad \Theta^d_*(x,E) = \liminf_{r\downarrow 0} \frac{H^d(E\cap B(x,r))}{(2r)^d} > 0,$$

$$(9)\qquad \int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty.$$

Alors, E est d-rectifiable.

(Pour la définition de la rectifiabilité, voir le début de la section 2.)

La réciproque de ce théorème est en général fausse, comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs. On considère le segment Γ d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, Γ_n formé de a_n segments de longueur $1/(a_n n^2)$ régulièrement répartis dans le segment d'extrémités $(0,2^{-n})$ et $(1,2^{-n})$. Soit

$$E=\Gamma\cup\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n\Big).$$

Alors E est compact, rectifiable, vérifie (8) et de plus

$$H^1(E)\le 1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}<+\infty.$$

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, a_n est suffisamment grand (de l'ordre de 2^n), alors pour tout $x\in\Gamma$,

$$B(x,2^{-n})\cap\Gamma_{n+1}\neq\emptyset.$$

On en déduit $\beta_\infty(x,2^{-n},E)\ge\frac14$ et donc

$$\int_0^1\beta_\infty(x,t,E)^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t}=\infty.$$

On a ainsi :

$$H^1\Big(\Big\{x\in E\,;\ \int_0^1\beta_\infty(x,t,E)^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t}=\infty\Big\}\Big)\ge H^1(\Gamma)=1.$$

Cependant, la réciproque du théorème 1.1 est vraie pour les ensembles Ahlfors-réguliers.

Un ensemble $E\subset\mathbb{R}^n$ est *Ahlfors-régulier de dimension* d ou d-régulier si E est fermé et s'il existe $C_0>0$ tel que, pour tout $x\in E$, tout r avec $0<r<\operatorname{diam}E$,

$$\frac{1}{C_0}r^d\le H^d\big(E\cap B(x,r)\big)\le C_0r^d. \tag{10}$$

La plus petite constante C_0 vérifiant (10) est appelée la *constante de régularité* de E.

Les d-plans, les d-graphes lipschitziens et certains ensembles de Cantor sont des exemples d'ensembles Ahlfors-réguliers.

THÉORÈME 1.2. — *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-régulier, compact vérifiant $H^d(E) < +\infty$. Alors, E est d-rectifiable si et seulement si en H^d presque tout $x \in E$, on a :*

$$\int_0^1 \beta_q(x,t,E)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty. \tag{11}$$

Le plan de l'article est le suivant.

La section 2 est consacrée à quelques rappels sur la théorie de la rectifiabilité. Dans la section 3, nous démontrons le théorème 1.1 pour les ensembles Ahlfors-réguliers ; les ingrédients principaux sont la théorie de la rectifiabilité uniforme de David et Semmes et des arguments de temps d'arrêt. Dans la section 4, nous donnons des théorèmes de recouvrement par des ensembles Ahlfors-réguliers (propositions 4.3, 4.4 et 4.5) qui nous permettent d'établir le théorème 1.1 dans le cas général à partir du cas des ensembles Ahlfors-réguliers. Enfin, dans la section 5, nous prouvons le théorème 1.2 (ou plutôt le sens restant).

Je tiens à remercier Guy David pour son constant soutien, ses nombreux conseils et suggestions.

2. Rappels sur la théorie de la rectifiabilité

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et d un entier positif inférieur à n.

- On définit la *d-mesure de Hausdorff* de E que l'on note $H^d(E)$ par

$$H^d(E) = \sup_{\delta>0} \Big[\inf \Big\{ \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^d \; ; \; E \subset \bigcup_i E_i \, , \; \operatorname{diam} E_i < \delta \Big\} \Big]. \tag{12}$$

- Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit *d-rectifiable* si

$$E \subset E_0 \cup \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i \Big\} \quad \text{avec} \quad H^d(E_0) = 0$$

et Γ_i est un d-graphe *lipschitzien* pour tout $i \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\Gamma_i = \big\{ x + A_i(x) \; ; \; x \in P_i \big\}$$

où P_i est un d-plan de $\mathbb{R}^n$ passant par l'origine, $P_i^\perp$ étant son orthogonal et $A_i : P_i \to P_i^\perp$ est une application lipschitzienne.

- Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit *purement non d-rectifiable* si

$$H^d(E \cap \Gamma) = 0$$

pour tout d-graphe lipschitzien Γ.