

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LA THÉORIE DE HIDA POUR LE GROUPE GSp_{2g}

Vincent Pilloni

**Tome 140
Fascicule 3**

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 335-400

SUR LA THÉORIE DE HIDA POUR LE GROUPE GSp_{2g}

PAR VINCENT PILLONI

RÉSUMÉ. — Nous construisons des familles ordinaires p -adiques de formes modulaires pour le groupe GSp_{2g} . Notre travail généralise et précise des travaux antérieurs de Hida.

ABSTRACT (*On Hida theory for the group GSp_{2g}*). — We construct ordinary p -adic families of modular forms for the group GSp_{2g} . Our work generalizes and precises previous work by Hida.

1. Introduction

Cet article reprend et généralise la théorie des familles p -adiques de formes modulaires ordinaires pour le groupe GSp_{2g} qui est développée par Haruzo Hida dans [7]. Celle-ci est utilisée par de nombreux auteurs, et nous avons pensé qu'il était utile de jeter une plus grande lumière sur les constructions de *loc. cit.* afin de préciser certains des énoncés. Ceci nous a permis de généraliser la théorie de Hida pour GSp_{2g} et de construire, pour chaque paraboli-ques standard P de GL_g , une théorie des familles p -adiques de formes modulaires de Siegel P -ordinaires. Pour le paraboli-que de Borel, on retrouve la théorie de [7]. Nous obtenons également des énoncés précis sur la spécialisation des familles de

Texte reçu le 21 septembre 2009, accepté le 28 août 2010.

VINCENT PILLONI, Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré, B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France

Classification mathématique par sujets (2010). — 11 F 46, 11 G 18.

Mots clefs. — Formes modulaires p -adiques, variétés de Siegel.

Hida en des poids dominants. Ces résultats sont utilisés dans [17] pour montrer la classicité de certaines spécialisations en genre 2.

Nous avons également travaillé avec des structures de niveau plus générales que dans [7], de façon à faciliter les applications arithmétiques de la théorie.

Nous avons de plus inclus un théorème de contrôle horizontal, corollaire facile des techniques développées ici. Nous utilisons ce dernier résultat pour construire des systèmes de Taylor-Wiles dans un autre travail [18].

Enfin, dans l'appendice, nous nous sommes intéressé aux opérateurs T_p et U_p . Nous démontrons de façon géométrique un certain nombre de propriétés fondamentales de ces opérateurs qui sont utilisées dans le texte.

Nous allons maintenant énoncer les résultats principaux pour une structure de niveau principal.

Soit GL_g le groupe algébrique des matrices $g \times g$ inversibles. Soit B le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur, B^0 le sous-groupe triangulaire inférieur, T le tore des matrices diagonales et $X(T)$ son groupe de caractères. Soit Q un parabolique standard de GL_g , triangulaire supérieur par blocs et soit Q^0 le parabolique opposé, triangulaire inférieur par bloc. Soit M_Q le sous-groupe de Levi, intersection de Q et Q^0 . Notons $X(M_Q) = X(Q) = X(Q^0) \subset X(T)$ le groupe des caractères de Q , Q^0 et M_Q . C'est un groupe libre de rang r , le nombre de blocs diagonaux de M_Q . Fixons un isomorphisme de $\mathbb{Z}^r$ avec $X(M_Q)$ en associant à un r -uplet $(k_1^Q, \dots, k_r^Q)$ le caractère $\prod_{i=1}^r \det_i^{k_i^Q}$ où on a posé $\det_i$ pour le déterminant du i -ème bloc diagonal en partant du bas. On note SQ (resp. SQ^0) le sous-groupe de Q (resp. Q^0), intersection des noyaux des caractères de $X(Q)$. Le quotient Q/SQ est un tore de caractère $X(Q)$, noté T_Q . On note $X(T)^+$ le cône des poids dominants par rapport au sous-groupe de Borel inférieur et $X(T_Q)^+ = X(T)^+ \cap X(T_Q)$ l'ensemble des caractères dominants de $X(T_Q)$. Avec notre identification, $X(T_Q)^+$ est l'ensemble des r -uplets $(k_1^Q, \dots, k_r^Q)$ vérifiant les $r - 1$ inégalités $k_1^Q \geq \dots \geq k_r^Q$. Un caractère dominant est dit Q -régulier si les inégalités sont strictes : $k_1^Q > \dots > k_r^Q$. On dit que le caractère est Q -très régulier si de plus $k_r^Q \gg 0$ (Cette dernière terminologie, classique mais un peu ambiguë, est précisée dans la partie 2).

On dispose d'une involution de $X(T)$,

$$\kappa = (k_1, \dots, k_g) \mapsto \kappa' = (-k_g, \dots, -k_1).$$

Cette involution respecte le cône dominant $X(T)^+$. Soit ω_0 la matrice antidiagonale de coefficients non nuls égaux à 1. Notons $P = \omega_0 {}^tQ \omega_0$ le parabolique déduit de Q par conjugaison par ω_0 et transposition. L'involution $\kappa \mapsto \kappa'$ échange $X(T_P)$ avec $X(T_Q)$.

Soit p un nombre premier et Γ_Q le pro- p sous-groupe maximal de $T_Q(\mathbb{Z}_p)$. Soit $\mathbb{Z}_p[[T_Q(\mathbb{Z}_p)]]$ et $\Lambda_Q = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_Q]]$ les algèbres de groupe complétées.

Soit $\bar{X}$ une compactification toroïdale de l'espace de modules sur $\mathbb{Z}_p$ des schémas abéliens principalement polarisés, munis d'une structure de niveau N principale avec $N \geq 3$ et $(N, p) = 1$ ([3], chap III). Soit $\mathcal{J}_\infty$ le lieu ordinaire de $\bar{X}$, $\mathcal{T}_\infty \rightarrow \mathcal{J}_\infty$ la tour d'Igusa, qui est un pro-revêtement étale galoisien de groupe $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$, $\mathcal{T}_{\infty,1}$ le revêtement fini étale de $\mathcal{J}_\infty$, premier cran de la tour d'Igusa et $\mathcal{T}_{\infty,1}/P$ le quotient de $\mathcal{T}_{\infty,1}$ par $P(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. L'algèbre des formes modulaires p -adiques pour le parabolique P est l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathcal{T}_\infty$, invariantes par le groupe $SP(\mathbb{Z}_p)$; on la note V_∞^{SP} . On désigne par $V_{\mathrm{cusp},\infty}^{SP}$ son idéal cuspidal. Pour tout poids $\kappa \in X(T_Q)$, $V_\infty^{SP}[-\kappa']$ est le module des formes p -adiques pour le parabolique P , de poids κ et $V_{\mathrm{cusp},\infty}^{SP}[-\kappa']$ est le sous-module des formes cuspidales. Notons ω^κ le faisceau modulaire de poids κ sur $\bar{X}$. C'est un faisceau localement libre de $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -modules et ses sections globales forment le module $M(\kappa, \Gamma_N, \mathbb{Z}_p)$ des formes modulaires de Siegel de niveau N , poids κ , à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. On note $S(\kappa, \Gamma_N, \mathbb{Z}_p)$ le sous-module des formes cuspidales.

Le théorème suivant est dû à Hida [7] lorsque $P = Q$ est le sous-groupe de Borel.

THÉORÈME 1.1 (contrôle vertical). — 1. *Pour tout poids $\kappa \in X(T_Q)$, il existe un plongement naturel :*

$$\Theta_P^* : M(\kappa, \Gamma_N, \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow V_\infty^{SP}[-\kappa']$$

2. *Il existe un projecteur de P -ordinarité e_P (voir def. 5.1), agissant sur*

$$V_\infty^{SP} \quad \text{et} \quad H^0(\mathcal{T}_{\infty,1}/P, \omega^\kappa).$$

3. *Pour tout caractère $\kappa \in X(T_Q)$, le $\mathbb{Z}_p$ -module $e_P V_{\mathrm{cusp},\infty}^{SP}[-\kappa']$ est libre de rang fini.*

4. *Pour tout poids dominant $\kappa \in X(T_Q)$, on a un isomorphisme :*

$$e_P V_\infty^{SP}[-\kappa'] \simeq e_P H^0(\mathcal{T}_{\infty,1}/P, \omega^\kappa)$$

5. *Si le poids κ est Q -régulier,*

$$e_P H^0(\mathcal{T}_{\infty,1}/P, \omega^\kappa) = e_P H^0(\mathcal{J}_\infty, \omega^\kappa)$$

6. *Si le poids κ est Q -très régulier, l'application Θ_P^* induit un isomorphisme,*

$$e_P S(\kappa, \Gamma_N, \mathbb{Z}_p) \simeq e_P V_{\mathrm{cusp},\infty}^{SP}[-\kappa']$$

7. *Il existe un $\mathbb{Z}_p[[T_Q(\mathbb{Z}_p)]]$ -module $\mathcal{V}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{ord}-P,*}$ qui est libre de rang fini comme Λ_Q -module et tel que pour tout poids $\kappa \in X(T_Q)$,*

$$\mathcal{V}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{ord}-P,*} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[T_Q(\mathbb{Z}_p)]]} \mathbb{Z}_p = \mathrm{Hom}(e_P V_{\mathrm{cusp},\infty}^{SP}[-\kappa'], \mathbb{Z}_p)$$

8. *Lorsque $P = Q = \mathrm{GL}_g$, les points 6 et 7 valent aussi sans supposer les formes cuspidales.*

- REMARQUES 1.1. — 1. Pour tout sous-groupe parabolique standard P de GL_g , de sous-groupe de Levi constitué de r blocs diagonaux, le projecteur e_P est en fait construit à l'aide de r projecteurs associés à r opérateurs de Hecke différents. Cet entier r est la dimension relative sur $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}_p$ de l'espace des poids $\mathrm{Spec} \Lambda_Q$. Il y a donc une coïncidence entre le nombre de conditions de contrôle définissant le module des formes modulaires p -adiques P -ordinaires et la dimension relative de l'espace des poids.
2. Le projecteur tient compte de la complexité des représentations algébriques du groupe GL_g , induites des caractères de $X(P)$, qui fabriquent les faisceaux modulaires ω^κ dont les formes modulaires sont les sections. Les caractères de GL_g , c'est-à-dire les puissances du déterminant, sont les représentations les plus simples du groupe GL_g . Il suffit, dans ce cas des poids « parallèles », d'un seul opérateur de Hecke pour construire le projecteur de GL_g -ordinarité. Il y a donc une seule condition de contrôle définissant le module des formes modulaires p -adiques GL_g -ordinaires.
3. Certains revêtements du lieu ordinaire $\mathcal{J}_\infty$ jouent des rôles particuliers. Sans l'hypothèse de Q -régularité, les formes modulaires p -adiques de poids dominant ne proviennent pas de sections du faisceau modulaire ω^κ sur le lieu ordinaire $\mathcal{J}_\infty$, mais plutôt de sections définies sur un revêtement $\mathcal{T}_{\infty,1}/P$ de celui-ci (voir le point 4 du théorème). Ceci doit donc amener les travaux à venir, notamment sur la théorie des formes modulaires surconvergentes pour le groupe GSp_{2g} , à considérer ces revêtements plutôt qu'à se restreindre à travailler au niveau de $\mathcal{J}_\infty$. Dans l'appendice, nous démontrons (thm. A.3) que les éléments du module $e_P H_{\mathrm{cusp}}^0(\mathcal{T}_{\infty,1}/P, \omega^\kappa)$ surconvergent dans la variété de Siegel de niveau parahorique P .
4. Il est difficile de préciser le point 6 du théorème et de déterminer exactement à quelle condition sur le poids on a un isomorphisme $e_P S(\kappa, \Gamma_N, \mathbb{Z}_p) \simeq e_P V_{\mathrm{cusp}, \infty}^{SP}[-\kappa']$. Lorsque $g = 1$, cette question est résolue dans [6]. Lorsque $g \geq 2$, le travail de Mokrane et Tilouine [14] répond à cette question sous certaines hypothèses et dans certains cas particuliers. Lorsque $g = 2$, nous donnons un critère général dans [17].

Le théorème de contrôle permet de construire des *familles de Hida* de formes modulaires p -adiques, P -ordinaires, cuspidales. Soit $\mathcal{H}^{Np}$ l'algèbre de Hecke sphérique de niveau premier à Np . On montre qu'elle agit $\mathbb{Z}_p[[T_Q(\mathbb{Z}_p)]]$ -linéairement sur le module $\mathcal{V}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{ord-P}, \star}$. La $\mathbb{Z}_p[[T_Q(\mathbb{Z}_p)]]$ -sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p[[T_Q(\mathbb{Z}_p)]]}(\mathcal{V}_{\mathrm{cusp}}^{\mathrm{ord-P}, \star})$ engendrée par l'image de $\mathcal{H}^{Np}$ est notée $\mathbb{T}^{\mathrm{ord-P}}$.

THÉORÈME 1.2. — *Pour toute composante irréductible C de $\mathrm{Spec} \mathbb{T}^{\mathrm{ord-P}}$, la projection $f : \mathrm{Spec} \mathbb{T}^{\mathrm{ord-P}} \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{Z}_p[[T_Q(\mathbb{Z}_p)]]$ induit un morphisme fini et surjectif $C \rightarrow \mathrm{Spec} \Lambda_Q$.*