Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LA SURCOHÉRENCE ENTRAÎNE L'HOLONOMIE

Daniel Caro

Tome 144
Fascicule 3

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 429-476

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 144, septembre 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

Bull. Soc. math. France
144 (3), 2016, p. 429–476

LA SURCOHÉRENCE ENTRAÎNE L'HOLONOMIE

PAR DANIEL CARO

RÉSUMÉ. — Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, de corps résiduel parfait. Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel lisse sur $\mathcal{V}$. Nous définissons la notion de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérence dans $\mathfrak{X}$ (après tout changement de base), ce qui correspond a priori à une notion plus faible que celle de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérence. Nous établissons qu'un module $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent après tout changement de base est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-holonome. De plus, nous en déduisons la propriété suivante de stabilité de la surholonomie: un complexe borné de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{E}$ est surholonome après tout changement de base si et seulement si, pour tout entier j, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ est surholonome après tout changement de base.

ABSTRACT (*The overcoherence implies the holonomicity*). — Let $\mathcal{V}$ be a mixed characteristic complete discrete valuation ring with perfect residue field. Let $\mathfrak{X}$ be a smooth formal scheme over $\mathcal{V}$ and D a divisor of its special fiber. We define the notion of $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-overcoherence in $\mathfrak{X}$ (after any change of basis), which is a priori a weaker notion than the $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-overcoherence. We prove that a $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-overcoherent after any change of basis module is $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-holonomic. Furthermore, we check that this implies the following property of stability of the overholonomicity: a bounded complex $\mathcal{E}$ of $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules is overholonomic after any change of basis if and only if, for any integer j, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ is overholonomic after any change of basis.

Texte reçu le 27 novembre 2012, révisé le 27 novembre 2014 et le 4 mai 2016, accepté le 19 mai 2016.

DANIEL CARO, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen, Campus 2, 14032 Caen Cedex, France. • *E-mail :* `daniel.caro@math.unicaen.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F30.

Mots clefs. — $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, holonomie, cohomologie p-adique.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2016/429/$ 5.00

Introduction

Ce travail s'inscrit dans la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de P. Berthelot. Cette théorie constitue une version arithmétique de celle des modules sur le faisceau des opérateurs différentiels (pour une introduction générale consulter [7], autrement lire dans l'ordre [3], [5], [6]). Comme l'avait conjectuée Berthelot, cette théorie, via la notion de surholonomie (voir [15]), permet d'obtenir dans un travail en commun avec Tsuzuki (voir [20]) une cohomologie p-adique sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique $p > 0$ stable par les six opérations cohomologiques de Grothendieck, i.e., image directe, image directe extraordinaire, image inverse, image inverse extraordinaire, produit tensoriel, foncteur dual. Voici le contexte de cette théorie : soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel supposé parfait. Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel intègre et lisse, X sa fibre spéciale. Dans la version arithmétique de Berthelot, le faisceau des opérateurs différentiels usuels $\mathcal{D}$ est remplacé par $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$. Plus précisément, il construit le faisceau sur $\mathfrak{X}$ des opérateurs différentiels de niveau fini et d'ordre infini noté $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$; ce dernier correspondant à la tensorisation par $\mathbb{Q}$ (indiqué par l'indice $\mathbb{Q}$) du complété faible p-adique (indiqué par le symbole « † ») du faisceau classique $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$ des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{X}$ (i.e. au sens de Grothendieck [21, 16]). Lorsque l'on parlera de structure de Frobenius (seulement dans ce cas-là), on suppose qu'il existe un isomorphism $\sigma\colon \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$ relevant l'endomorphisme de Frobenius de k. Berthelot a aussi obtenu la notion de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module « holonome » en s'inspirant du cas classique : un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent (i.e un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent avec une structure de Frobenius) est holonome s'il est nul ou si la dimension de sa variété caractéristique est égale à la dimension de X. On dispose de plus de la caractérisation de Virrion de l'holonomie (voir [32]) : un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si le foncteur dual $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire est acyclique pour $\mathcal{E}$. Plus généralement, soit D un diviseur de X. Le critère de Virrion permet d'étendre la notion d'holonomie de la manière suivante : un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-holonome si le foncteur dual $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-linéaire est acyclique pour $\mathcal{E}$. La conjecture la plus forte (car elle implique toutes les autres) de Berthelot sur la stabilité de l'holonomie (voir [7, 5.3.6]) prédit qu'un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-module holonome est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome. Lorsque $\mathfrak{X}$ est projectif, cette conjecture a été établie (voir [19]). Par contre, un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-module holonome n'est pas toujours un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome, i.e., il faut faire plus attention sans structure de Frobenius. En effet, les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-cohérent (i.e.

les isocristaux surconvergents sur $(X \setminus D, X)$ dans le langage de la cohomologie rigide) sont des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-modules holonomes mais ils ne sont pas toujours $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent (et donc encore moins $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-holonome). Pour espérer généraliser cette conjecture de Berthelot sans structure de Frobenius, il faut rajouter des conditions supplémentaires de type non-Liouville (voir [18] pour un tout premier travail dans cette direction).

Soit $\mathscr{E} \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}})$. Dans ce papier nous introduisons la notion de « $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérence dans $\mathfrak{X}$ » : le complexe $\mathscr{E}$ est $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent dans $\mathfrak{X}$ si, pour tout diviseur T de X, on ait $({}^{\dagger}T)(\mathscr{E}) \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}})$, où $({}^{\dagger}T)$ est le foncteur localisation en dehors de T. Cette notion rejoint celle de la $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérence définie dans [10]. En effet, $\mathscr{E}$ est $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent si et seulement si pour tout morphisme lisse de la forme $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$, le complexe $f^{!}(\mathscr{E})$ est $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'}({}^{\dagger}f^{-1}(D))_{\mathbb{Q}}$-surcohérent dans $\mathfrak{X}'$. Nous prouvons dans ce papier l'implication $(*)$: si $\mathscr{E}$ est $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent dans $\mathfrak{X}$ et après tout changement de la base $\mathcal{V}$ alors $\mathscr{E}$ est $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-holonome. En particulier, si $\mathscr{E}$ est $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent et après tout changement de la base $\mathcal{V}$ alors $\mathscr{E}$ est $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-holonome. Nous avons besoin de la stabilité de la surcohérence après tout changement de la base $\mathcal{V}$ pour pouvoir utiliser le théorème [16, 3.4] dont une version correcte nécessite l'ajout de l'hypothèse « et après tout changement de la base $\mathcal{V}$ » (il manque cette indication dans la version publiée de [16, 3.4]). En effet, la seconde partie de la preuve de [16, 3.4] qui devait permettre de se ramener au cas d'un corps résiduel non dénombrable ne fonctionne pas. Pour remédier à cette erreur, il suffit d'ajouter l'hypothèse « et après tout changement de la base $\mathcal{V}$ » aux résultats utilisant [16, 3.4] ou alors supposer le corps résiduel non dénombrable.

Cette implication $(*)$ améliore le théorème plus faible déjà connu établissant qu'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-module surcohérent est surholonome et donc holonome (voir [20, 2.3.17] ou [17, 6.2.4] pour la version la plus générale possible). Lorsque $\mathfrak{X}$ est de plus projectif, il découle de [19] que les notions de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-holonomie et de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$-surcohérence dans $\mathfrak{X}$ sont équivalentes, i.e. la réciproque est valable au moins dans cette situation géométrique et avec une structure de Frobenius.

Même dans le cas de la surcohérence (notion plus restrictive à priori que la surcohérence dans $\mathfrak{X}$) avec structure de Frobenius évoquée ci-dessus, la preuve de ce papier est aussi intéressante puisqu'elle est directe et n'utilise pas le puissant théorème de la réduction semi-stable de Kedlaya. En effet, la preuve avec structure de Frobenius de l'équivalence entre surcohérence et surholonomie est le résultat d'un long processus dont voici une esquisse : Afin d'obtenir de surcroît des coefficients stables par dualité, la notion de surcohérence avait été raffinée via la notion de « surholonomie ». Nous avions établi comme son