

**THÉORIE DE HODGE  
ET GÉOMÉTRIE ALGÈBRE COMPLEXE**

**Claire Voisin**

### Comité de rédaction

Jean-Benoît BOST  
François LOESER

Joseph OESTERLÉ

Daniel BARLET (dir.)

### Diffusion

Maison de la SMF  
B.P. 67  
13274 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

EDP Sciences  
17, avenue du Hoggar  
91944 les Ulis cedex A  
France  
www.edpsciences.com

### Tarifs 2002

*Vente au numéro* : 69 € (\$78)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2002

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1284-6090

ISBN 2-85629-129-5

Directeur de la publication : Michel WALDSCHMIDT

**COURS SPÉCIALISÉS 10**

**THÉORIE DE HODGE  
ET GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE COMPLEXE**

**Claire Voisin**

**Société Mathématique de France 2002**  
Publié avec le concours de l'Institut Universitaire de France



## TABLE DES MATIÈRES

|  |     |
|--|-----|
| <b>Introduction</b> .....                                    | 1   |
| <b>Partie I. Préliminaires</b>                               |     |
| <b>1. Fonctions holomorphes de plusieurs variables</b> ..... | 29  |
| 1.1. Fonctions holomorphes d'une variable .....              | 30  |
| 1.2. Fonctions holomorphes de plusieurs variables .....      | 35  |
| 1.3. L'équation $\partial g / \partial \bar{z} = f$ .....    | 41  |
| Exercices .....  | 43  |
| <b>2. Variétés complexes</b> .....                           | 45  |
| 2.1. Variétés et fibrés vectoriels .....                     | 46  |
| 2.2. Intégrabilité des structures presque complexes .....    | 50  |
| 2.3. Opérateurs $\partial$ et $\bar{\partial}$ .....         | 58  |
| 2.4. Exemples de variétés complexes .....                    | 64  |
| Exercices .....  | 65  |
| <b>3. Métriques kählériennes</b> .....                       | 67  |
| 3.1. Définition et premières propriétés .....                | 68  |
| 3.2. Caractérisations des métriques kählériennes .....       | 72  |
| 3.3. Exemples de variétés kählériennes .....                 | 77  |
| Exercices .....  | 83  |
| <b>4. Faisceaux et cohomologie</b> .....                     | 85  |
| 4.1. Faisceaux .....   | 86  |
| 4.2. Foncteurs et foncteurs dérivés .....                    | 95  |
| 4.3. Cohomologie des faisceaux .....                         | 102 |
| Exercices .....  | 111 |

## Partie II. La décomposition de Hodge

|   |     |
|---|-----|
| <b>5. Formes harmoniques et cohomologie</b> .....                     | 115 |
| 5.1. Laplaciens .....   | 116 |
| 5.2. Opérateurs différentiels elliptiques .....                       | 122 |
| 5.3. Applications .....   | 125 |
| Exercices .....   | 131 |
| <b>6. Cas des variétés kählériennes</b> .....                         | 133 |
| 6.1. La décomposition de Hodge .....                                  | 134 |
| 6.2. Décomposition de Lefschetz .....                                 | 139 |
| 6.3. Théorème de l'indice de Hodge .....                              | 144 |
| Exercices .....   | 147 |
| <b>7. Structures de Hodge et polarisations</b> .....                  | 149 |
| 7.1. Définitions, premières propriétés .....                          | 150 |
| 7.2. Exemples .....   | 158 |
| 7.3. Functorialité .....  | 165 |
| Exercices .....   | 172 |
| <b>8. Complexes de de Rham holomorphes et suites spectrales</b> ..... | 175 |
| 8.1. Hypercohomologie .....   | 176 |
| 8.2. Complexes de de Rham holomorphes .....                           | 185 |
| 8.3. Filtrations et suites spectrales .....                           | 188 |
| 8.4. Théorie de Hodge des variétés ouvertes .....                     | 195 |
| Exercices .....   | 201 |

## Partie III. Variations de structure de Hodge

|  |     |
|--|-----|
| <b>9. Familles et déformations</b> .....         | 207 |
| 9.1. Familles de variétés .....                  | 208 |
| 9.2. Connexion de Gauss-Manin .....              | 215 |
| 9.3. Le cas kählérien .....                      | 219 |
| <b>10. Variation de structure de Hodge</b> ..... | 225 |
| 10.1. Domaine et application des périodes .....  | 226 |
| 10.2. Variations de structure de Hodge .....     | 234 |
| 10.3. Applications .....                         | 238 |
| Exercices .....                                  | 243 |

## Partie IV. Cycles et classes de cycles

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| <b>11. Classes de Hodge</b> ..... | 247 |
| 11.1. Classe de cycle .....       | 248 |
| 11.2. Classes de Chern .....      | 258 |
| 11.3. Classes de Hodge .....      | 261 |
| Exercices .....                   | 268 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>12. Cohomologie de Deligne-Beilinson et application d'Abel-Jacobi</b> ..... | 271 |
| 12.1. Application d'Abel-Jacobi .....  | 272 |
| 12.2. Propriétés .....   | 280 |
| 12.3. Cohomologie de Deligne .....   | 284 |
| Exercices .....  | 291 |

### Partie V. Topologie des variétés algébriques

|  |     |
|--|-----|
| <b>13. Le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes</b> ..... | 295 |
| 13.1. Théorie de Morse .....   | 296 |
| 13.2. Application aux variétés affines .....                           | 302 |
| 13.3. Théorème d'annulation et théorème de Lefschetz .....             | 309 |
| Exercices .....  | 311 |
| <b>14. Étude des pincesaux de Lefschetz</b> .....                      | 313 |
| 14.1. Pinceaux de Lefschetz .....                                      | 314 |
| 14.2. Dégénérescence de Lefschetz .....                                | 318 |
| 14.3. Application aux pincesaux de Lefschetz .....                     | 323 |
| Exercices .....  | 331 |
| <b>15. Monodromie</b> .....  | 335 |
| 15.1. Action de monodromie .....                                       | 336 |
| 15.2. Cas des pincesaux de Lefschetz .....                             | 344 |
| 15.3. Application : le théorème de Noether-Lefschetz .....             | 355 |
| Exercices .....  | 359 |
| <b>16. Suite spectrale de Leray</b> .....                              | 363 |
| 16.1. Définition de la suite spectrale .....                           | 364 |
| 16.2. Le théorème de Deligne .....                                     | 376 |
| 16.3. Théorème des cycles invariants .....                             | 380 |
| Exercices .....  | 386 |

### Partie VI. Variation de structure de Hodge

|  |     |
|--|-----|
| <b>17. Transversalité et applications</b> .....        | 391 |
| 17.1. Complexes associés aux VISH .....                | 392 |
| 17.2. Suite spectrale de Leray holomorphe .....        | 399 |
| 17.3. Étude locale des lieux de Hodge .....            | 403 |
| Exercices .....  | 412 |
| <b>18. Filtration de Hodge des hypersurfaces</b> ..... | 415 |
| 18.1. Filtration par l'ordre du pôle .....             | 416 |
| 18.2. VISH des hypersurfaces .....                     | 424 |
| 18.3. Premières applications .....                     | 433 |
| Exercices .....  | 438 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>19. Fonctions normales et invariants infinitésimaux</b> .....  | 443 |
| 19.1. Fibration jacobienne .....                                  | 444 |
| 19.2. Application d'Abel-Jacobi .....                             | 447 |
| 19.3. Cas des hypersurfaces de haut degré de $\mathbb{P}^n$ ..... | 458 |
| Exercices .....   | 463 |
| <b>20. Travaux de Nori</b> .....                                  | 467 |
| 20.1. Le théorème de connexité .....                              | 469 |
| 20.2. Équivalence algébrique .....                                | 478 |
| 20.3. Application du théorème de connexité .....                  | 485 |
| Exercices .....   | 489 |
| <b>Partie VII. Cycles algébriques</b>                             |     |
| <b>21. Groupes de Chow</b> .....                                  | 493 |
| 21.1. Construction .....  | 495 |
| 21.2. Intersection et classes de cycles .....                     | 503 |
| 21.3. Exemples .....  | 513 |
| Exercices .....   | 519 |
| <b>22. Le théorème de Mumford et ses généralisations</b> .....    | 521 |
| 22.1. Variétés à $CH_0$ représentable .....                       | 523 |
| 22.2. La construction de Bloch-Srinivas .....                     | 532 |
| 22.3. Généralisation .....  | 541 |
| Exercices .....   | 543 |
| <b>23. La conjecture de Bloch et ses généralisations</b> .....    | 545 |
| 23.1. Surfaces avec $p_g = 0$ .....                               | 546 |
| 23.2. Filtration sur les groupes de Chow .....                    | 558 |
| 23.3. Cas des variétés abéliennes .....                           | 562 |
| Exercices .....   | 573 |
| <b>Bibliographie</b> .....  | 577 |
| <b>Index</b> .....  | 589 |

## INTRODUCTION

**Variétés kählériennes et variétés projectives.** — Ce livre est constitué de sept parties. Le but des quatre premières parties est d'expliquer l'existence de structures particulières sur la cohomologie des variétés kählériennes (la décomposition de Hodge et la décomposition de Lefschetz) et d'en montrer les premières propriétés et conséquences. Elles constituent une introduction à la géométrie kählérienne et à la théorie de Hodge. Les trois dernières parties ont pour but de présenter des résultats plus avancés en théorie de Hodge. Elles sont consacrées aux liens entre la théorie de Hodge, la topologie et l'étude des cycles algébriques sur les variétés projectives complexes lisses.

Les variétés projectives complexes lisses sont en effet des exemples particuliers de variétés kählériennes compactes. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme de type  $(1, 1)$  relativement à la structure complexe, est fermée. Cette 2-forme est appelée la forme de Kähler de la métrique kählérienne. Comme l'espace projectif complexe est une variété kählérienne (on dispose par exemple de la métrique de Fubini-Study), les sous-variétés complexes de l'espace projectif sont aussi kählériennes grâce à la métrique induite. On peut même dire précisément quelle est la place occupée par les variétés projectives complexes parmi les variétés kählériennes grâce au théorème de Kodaira :

***Théorème 1.** — Une variété complexe compacte admet un plongement holomorphe dans un espace projectif complexe si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont la forme de Kähler est de classe entière.*

Dans les quatre premières parties de ce texte, nous nous intéresserons essentiellement à la classe des variétés kählériennes, sans privilégier les variétés projectives. La raison est que notre but ici est d'établir l'existence de la décomposition de Hodge et de la décomposition de Lefschetz sur la cohomologie d'une telle variété, et qu'il n'est

pas besoin pour cela de supposer que la classe de Kähler est entière. Néanmoins la décomposition de Lefschetz ne sera définie sur la cohomologie rationnelle que dans le cas projectif, et c'est déjà une raison importante pour se limiter ultérieurement au cas des variétés projectives. En effet, nous dégagerons dans ce texte la notion de structure de Hodge polarisée, et de domaine des périodes polarisées paramétrant les structures de Hodge polarisées. Ces domaines de périodes polarisées possèdent des propriétés de courbure que n'ont pas les domaines de périodes non polarisées. Or la décomposition de Lefschetz, lorsqu'elle est définie sur la cohomologie rationnelle ou entière permet justement de scinder la cohomologie d'une variété kählérienne en une somme directe de structures de Hodge polarisées.

Une autre raison de se limiter dans les applications de la théorie de Hodge aux variétés projectives réside dans le fait qu'une variété kählérienne ne possède pas en général de sous-variétés complexes, alors que les variétés projectives en contiennent beaucoup, à tel point qu'il est conjecturé actuellement, comme une vaste généralisation de la conjecture de Hodge, que les structures de Hodge sur une variété projective  $X$  sont gouvernées par, et déterminent en un sens à préciser, la géométrie des sous-variétés algébriques de  $X$ , et plus précisément les groupes de Chow de  $X$ .

**La décomposition de Hodge.** — Si  $X$  est une variété complexe, l'espace tangent de  $X$  en chaque point  $x$  est en particulier muni d'une structure complexe  $J_x$ . La donnée de cette structure complexe en chaque point est ce qu'on appelle la structure presque complexe sous-jacente. La donnée de  $J_x$  fournit une décomposition

$$(0.1) \quad T_{X,x} \otimes \mathbb{C} = T_{X,x}^{1,0} \oplus T_{X,x}^{0,1},$$

où  $T_{X,x}^{0,1}$  est l'espace vectoriel des vecteurs tangents complexifiés  $u \in T_{X,x}$  tels que  $J_x u = -iu$ . Du point de vue de la structure complexe, c'est-à-dire de la donnée locale de coordonnées holomorphes, les champs de vecteurs de type  $(0,1)$  sont ceux qui annulent les fonctions holomorphes.

La décomposition (0.1) induit une décomposition semblable sur les fibrés de formes différentielles complexes

$$(0.2) \quad \Omega_{X,\mathbb{C}}^k := \Omega_{X,\mathbb{R}}^k \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^{p,q},$$

où

$$\Omega_X^{p,q} \cong \bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^q \Omega_X^{0,1}$$

et

$$\Omega_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}$$

est la décomposition duale de (0.1). La décomposition (0.2) a la propriété de symétrie de Hodge

$$\overline{\Omega_X^{p,q}} = \Omega_X^{q,p},$$

où la conjugaison complexe agit de façon naturelle sur  $\Omega_{X,\mathbb{C}}^k = \Omega_{X,\mathbb{R}}^k \otimes \mathbb{C}$ .