Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 185
Nouvelle série

IWASAWA THEORY OF TWISTS OF ELLIPTIC MODULAR FORMS OVER IMAGINARY QUADRATIC FIELDS AT INERT PRIMES

K. BÜYÜKBODUK & A. LEI

2025

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Boris ADAMCZEWSKI
François CHARLES
Gabriel DOSPINESCU
Béatrice de TILLIÈRE
Clotilde FERMANIAN
Dorothee FREY
Youness LAMZOURI
Wendy LOWEN
Ludovic RIFFORD
François DAHMANI (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 46 € ($ 69)
Abonnement électronique : 128 € ($ 192)
Abonnement avec supplément papier : 220 €, hors Europe : 265 € ($ 397)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
memoires@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2025*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN papier 0249-633-X ; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-37905-208-8

doi:10.24033/msmf.492

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

MÉMOIRES DE LA SMF 185

IWASAWA THEORY OF TWISTS OF ELLIPTIC MODULAR FORMS OVER IMAGINARY QUADRATIC FIELDS AT INERT PRIMES

Kâzım Büyükboduk
Antonio Lei

Société Mathématique de France 2025

K. Büyükboduk

UCD School of Mathematics and Statistics, University College Dublin, Ireland.

E-mail : kazim.buyukboduk@ucd.ie

A. Lei

Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 150 Louis-Pasteur Pvt, Ottawa, ON, Canada K1N 6N5.

E-mail : antonio.lei@uottawa.ca

Soumis le 28 mars 2022, révisé le 16 avril 2023, accepté le 9 juin 2023.

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** **–** 11R23; 11F11, 11R18.

Key words and phrases. **–** Iwasawa theory, Rankin-Selberg products, semi-ordinary primes, locally restricted Euler systems, Beilinson-Flach elements.

Mots clefs. **–** Théorie d'Iwasawa, produits de Rankin-Selberg, nombres premiers semi-ordinaires, systèmes d'Euler localement restreints, éléments de Beilsinson-Flach.

IWASAWA THEORY OF TWISTS OF ELLIPTIC MODULAR FORMS OVER IMAGINARY QUADRATIC FIELDS AT INERT PRIMES

Kâzım Büyükboduk, Antonio Lei

Abstract. **–** Our primary goal in this manuscript is to study the Iwasawa theory for semi-ordinary families of automorphic forms on $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_1$, where K is an imaginary quadratic field where the prime p is inert. We prove divisibility results towards Iwasawa main conjectures in this context, utilizing the optimized signed factorization procedure for Perrin-Riou functionals and Beilinson-Flach elements for a family of Rankin-Selberg products of p-ordinary forms with a fixed p-non-ordinary modular form. The optimality enables an effective control on the μ-invariants of Selmer groups and p-adic L-functions as the modular forms vary in families, which is crucial for our patching argument to establish one divisibility in an Iwasawa main conjecture in three variables.

Résumé **(La théorie d'Iwasawa des twists des formes modulaires elliptiques sur les corps quadratiques imaginaires aux nombres premiers inertes)**

Le but principal du présent manuscrit est d'étudier la théorie d'Iwasawa pour les familles semi-ordinaires de formes automorphes sur $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_1$, où K est un corps quadratique imaginaire dans lequel le nombre premier p est inerte. Nous démontrons des résultats de divisibilité en vue des conjectures principales d'Iwasawa dans ce contexte, en utilisant la procédure de factorisation signée optimisée pour les fonctionnelles de Perrin-Riou et les éléments de Beilinson-Flach pour une famille de produits de Rankin-Selberg de formes p-ordinaires avec une forme modulaire p-non-ordinaire fixée. L'optimalité permet un contrôle effectif sur les μ-invariants des groupes de Selmer et des fonctions L p-adiques lorsque les formes modulaires varient en familles, ce qui est crucial pour notre argument de recollement visant à établir une divisibilité dans une conjecture principale d'Iwasawa à trois variables.

© Mémoires de la Société Mathématique de France 185, SMF 2025

CONTENTS

1. Introduction 1
1.1. Previous works 1
1.2. This manuscript: The strategy 16
1.3. The setting 18
1.4. Conjectures and results 19
1.5. A summary of our results 22
1.6. Layout 27
1.7. Notation 29

2. Construction of the optimized Coleman maps 31
2.1. Dieudonné modules and φ-eigenvectors 31
2.2. Factorization of one-variable Perrin-Riou maps 34
2.3. Coleman maps for a rank-two quotient 39
2.4. Two-variable Perrin-Riou maps and Coleman maps 41
2.5. The case $a_p(g) = 0$ 47

3. Beilinson-Flach elements and p-adic L-functions 51
3.1. Beilinson-Flach elements 51
3.2. Euler systems of rank 2 and uniform integrality 55
3.3. p-adic L-functions 57

4. Selmer groups and main conjectures 63
4.1. Definitions of Selmer groups 63
4.2. Classical and signed Iwasawa main conjectures 65

5. Applications towards main conjectures 67
5.1. Cyclotomic main conjectures for $f \otimes g$ 67
5.2. Cyclotomic main conjectures for $\mathbf{f} \otimes g$ 69
5.3. Main conjectures over an imaginary quadratic field where p is inert 71

A. A divisibility criterion in regular rings 87

B. p-adic Rankin-Selberg L-functions and universal deformations 89
B.1. The set up 90
B.2. The minimally ramified universal deformation representation 91
B.3. Hida families 93
B.4. p-adic Rankin-Selberg L-function 93