Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 83–109.

LES QUATERNIONS ET LE MOUVEMENT DU SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE CHEZ HAMILTON

Luc SINÈGRE (*)

RÉSUMÉ. — L'article analyse, à partir notamment du mémoire *On quaternions and the rotation of a solid body* communiqué en 1848, plusieurs concepts algébriques (endomorphisme, conjugaison, polynôme caractéristique) qui ont joué un rôle important dans la dernière période de la vie de Hamilton. En considérant l'exemple de la dualité, on cherche à montrer comment sa pratique mathématique se rattache à ses lectures et recherches optiques ou physiques des années 1830.

ABSTRACT. — QUATERNIONS AND THE MOTION OF A SOLID BODY ABOUT A FIXED POINT ACCORDING TO HAMILTON. This paper investigates — in the light of his paper *On quaternions and the rotation of a solid body*, dating from 1848 — several algebraic concepts (endomorphism, conjugation, characteristic polynomial) that played a major role in the ultimate phase of Hamilton's work. Looking into the case of duality, it will be seen that this provides an opportunity of making apparent how his mathematical practices were linked to his readings and optical or physical investigations, harking back to the 1830s.

1. INTRODUCTION

En 1843, après des années de recherches infructueuses sur les triplets, pour tenter de généraliser les nombres complexes, Hamilton grave, sur le «Broome Bridge» qui enjambe le *Royal Canal* à Dublin, les célèbres équations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

marquant la naissance des quaternions. Cependant, comme l'indique J. Gray[1], Olinde Rodrigues avait obtenu la paramétrisation du groupe

[1] *Around and around : quaternions, rotations and Olinde Rodrigues*, Actes du colloque *Nombres complexes et vecteurs*, D. Flament éd. (à paraître). Voir aussi [Gray 1980].

(*) Texte reçu le 3 mars 1994, révisé le 5 septembre 1994.
Luc SINÈGRE, 8 passage du Bon Pasteur, 76000 Rouen (France).

orthogonal dès 1840, à partir des travaux d'Euler et grâce à un passage en tangente du demi-angle [Rodrigues 1840, p. 404]. Si Hamilton ne semble pas avoir eu connaissance de ce texte publié dans le *Journal* de Liouville, le jeune Cayley a perçu dès 1846 les relations unissant les nouveaux nombres et cette paramétrisation [Cayley 1846, p. 237][2]. Hamilton, qui avait obtenu dès 1844 une représentation des rotations [Hamilton 1847], revient sur l'étude du mouvement autour d'un point fixe plusieurs années plus tard, dans un mémoire communiqué en 1848 que nous allons particulièrement étudier [Hamilton 1850b]. Les textes de Cayley et de Hamilton diffèrent sensiblement, par le style et le contenu. Alors que Cayley, dans le prolongement d'Euler et de Lagrange, intègre le système différentiel en utilisant le paramétrage de Rodrigues, Hamilton cherche à donner une interprétation vectorielle pour retrouver les descriptions géométriques de Poinsot [1834] et Mac Cullagh [1844a,b][3].

Ce texte sur le mouvement du solide me permettra ainsi de poser et d'illustrer plusieurs questions[4], et de souligner le rôle important que joue la dualité dans l'œuvre algébrique de Hamilton. Après la découverte des quaternions, on peut déceler chez lui deux grandes directions de recherche, auxquelles on peut ajouter une troisième en filigrane. La première est la justification, la présentation et, en termes modernes, la construction de l'algèbre des quaternions elle-même. Je n'ai pas choisi de développer ici cet aspect de son travail auquel de nombreux commentaires ont été

[2] Dans les citations bibliographiques, la pagination utilisée est celles des *Œuvres* d'un auteur lorsqu'elles sont publiées.

[3] Les sources de Cayley sont à la fois plus variées et plus récentes que celles de Hamilton. Il explique être parti des équations différentielles obtenues grâce à l'idée de Rodrigues en espérant les intégrer à l'aide du «multiplicateur» découvert par Jacobi. Ce point est intéressant si l'on rappelle que la théorie de Jacobi est une amélioration des travaux mécaniques de Hamilton [Dugas 1950, chap. 6]. En même temps, Cayley s'avoue intrigué par les connexions possibles entre les formules obtenues et la théorie des quaternions. Il en donne un peu plus tard l'explication en paramétrant, dans un papier très court, facile à lire, le groupe des rotations grâce aux quaternions [Cayley 1848]. Il y utilise les règles opératoires des quaternions comme des règles symboliques, propres à traduire et à simplifier les expressions cartésiennes ordinaires et ne pose donc, à la différence de Hamilton, aucun problème théorique.

[4] Elles sont développées dans ma thèse : *Au-delà du temps pur : aspects géométriques, constructions et pratiques dans l'œuvre algébrique de Sir Rowan William Hamilton*, (C. Houzel dir.), Université Paris VII, 1994.

consacrés. La deuxième, qui se développe rapidement après 1844, consiste à trouver les applications de sa découverte. Les quaternions, d'abord confrontés à la trigonométrie sphérique, ont ensuite été utilisés pour résoudre des problèmes de géométrie. Hamilton produit ainsi, pour le public anglais, une longue suite d'articles explicitant un calcul vectoriel dont la forme est symbolique et le fond entièrement géométrique [Hamilton 1846–1849]. Il y donne, à la manière de Peacock auquel il rend d'ailleurs hommage, une définition nouvelle du quotient de deux vecteurs, et donc des quaternions. C'est la relation fondamentale $(b : a) \times a = b$ qui définit le quotient $b : a$. En tirant les conséquences algébriques de cette définition formelle à laquelle il ajoute plusieurs autres contraintes algébriques (sommes, produits et distributivité sur les quotients de même dénominateur), il peut ainsi présenter à la manière de l'École de Cambridge, c'est-à-dire en séparant clairement les règles algébriques symboliques de leurs interprétations géométriques, une définition cohérente de son système. Il abandonne provisoirement les autres constructions, basées sur la trigonométrie ou surtout sur ses conceptions personnelles à propos du temps, dans le but de diffuser en Angleterre les nombreuses applications géométriques que son calcul a déjà fournies[5]. Le champ d'application du calcul des quaternions va parallèlement s'étendre à la mécanique. En effet, pendant son voyage à Cambridge de 1845, Hamilton, dans les *Newton's rooms*, emploie pour la première fois, sur une idée de Herschel, les quaternions pour traduire un problème physique (l'attraction newtonienne) [Graves II, p. 495]. Notre texte se situe dans le cadre de ce courant. La troisième voie, rêvée depuis le début par Hamilton et que jusqu'à sa mort il a espéré voir aboutir, est la recherche, grâce à ces nouveaux outils, d'une grande loi physique unificatrice (et, en particulier, une loi de l'électricité ou de l'électromagnétisme) ; cela s'est avéré être une impasse[6].

[5] « *Unlike as my little papers on this latter subject* [*la géométrie symbolique*] *in the* Cambridge and Dublin mathematical journal*, may appear to those other papers which I have hitherto printed on quaternions, yet if you have dipped into both, you will no long fail to recognise, perhaps may have recognised already, that the "Geometrical fraction" of the one set is just the "quaternion" of the other in disguise* », lettre de S.R.W Hamilton à Augustus De Morgan du 7 mai 1847 [Graves III, p. 269–270].

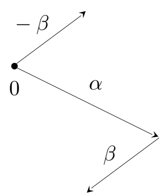
[6] « *There seems to me to be something analogous to polarized intensity in the pure imaginary part ; and to unpolarized energy (indifferent to direction) in the real part of a quaternion : and thus we have some slight glimpse of a future calculus of polarities* » écrit Hamilton dans une lettre à Graves [*MP* 3, p. 110]). Son fils Edwin rappelle

L'échec de la première voie est consacré par le peu d'audience et d'intérêt que suscite, en 1853, le traité qui résume toute la construction «métaphysique» des quaternions : les *Lectures*. Hamilton a tenté de donner dans ce livre, pour la première fois, une construction globale du système qui soit en cohérence avec ses conceptions métaphysiques sur le temps. Il distingue, par exemple, l'analyse du quotient d'un couple de vecteurs et la synthèse. L'analyse traduit les conséquences nécessaires des lois algébriques et lui permet de reprendre d'une façon plus personnelle ce qu'il avait écrit dans le style symboliste pour la revue de Cambridge. La synthèse interprète le quotient comme un véritable opérateur (en fait une rotation) qui agit sur les autres vecteurs; un couple orthogonal opère donc comme un quart de tour. Comme dans une importante communication donnée dès 1843 [Hamilton 1844], mais publiée *in extenso* seulement quatre ans plus tard [1848], les mêmes objets prennent, en fonction de leur place dans un produit, des interprétations différentes. Hamilton, qui est rigoureux, doit ensuite allonger son propos en vérifiant soigneusement la compatibilité de ces multiples identifications; la dernière règle algébrique n'est démontrée qu'à la sixième leçon. Les applications, pourtant nombreuses, occupent la dernière leçon, c'est-à-dire moins du quart du livre.

La production mathématique de Hamilton se réduit donc, après 1850, à une recomposition, dans le langage des quaternions, de l'ensemble des mathématiques de l'époque et de leurs applications. Ceci posé, je crois que trop de chercheurs ont négligé d'analyser les pratiques et les manières de faire de cette période. Car, s'il est exact que les textes relatifs à l'application des quaternions, suivant la deuxième voie où est mis en place le calcul vectoriel, vont se multiplier pour l'édition des *Elements*, sa technique et sa manière algébrique ne restent pas constantes pendant toutes ces années. Bien au contraire, Hamilton va, au fur et à mesure de ses besoins, introduire les outils algébriques abstraits (endomorphismes, polynômes d'endomorphismes), qui lui permettent de simplifier les démonstrations et de clarifier la construction. Il va, petit à petit, poser dans un cadre algébrique la dualité dont il avait déjà travaillé les expressions géométrique (en liaison avec l'optique) et mécanique à partir

également que, peu de temps avant sa mort, pendant leurs ultimes conversations, son père lui parla d'applications des quaternions à l'électricité, en particulier à l'idée de polarité, «*bows to be reserved for the hands of another Ulysses*», qu'il n'avait pas été capable de développer pleinement pendant sa vie (Introduction des *Elements* [1866]).

des textes de mathématiciens continentaux comme Poinsot et Chasles. Un carnet de notes, à la date d'avril 1846 [Hamilton *MS*, n° 70], c'est-à-dire au printemps qui suit le voyage à Cambridge, contient de nombreuses références à la *Statique*[7] de Poinsot et donne un exemple intéressant de ce processus d'algébrisation. Hamilton y définit des *couples algébriques* de vecteurs qui correspondent aux *couples mécaniques* de Poinsot. Le couple algébrique de vecteurs (α, β) traduit la situation physique qu'illustre le schéma ci-dessous.



Hamilton énonce que deux couples algébriques (α, β) et (α', β') produisent le même système de forces si et seulement si $\alpha'\beta' - \beta'\alpha' = \alpha\beta - \beta\alpha$. Pour démontrer le sens direct ou réciproque de cette proposition, il va plusieurs fois se transporter du terrain algébrique représenté par les vecteurs, leurs rapports opératoires et la relation algébrique d'équivalence qu'il vient d'écrire, au terrain mécanique dont la base est l'équivalence physique des systèmes de forces. Dans la suite du carnet, il munit l'ensemble des couples d'une addition, pour retrouver d'autres résultats de Poinsot, par la méthode des vecteurs[8]. Il faudra donc se demander si les créations algébriques qui vont se développer pendant la période qui suit la publication des *Lectures* contiennent des intuitions algébriques majeures ou simplement témoignent d'une clarification et d'un infléchissement de style. Le texte sur le mouvement du solide recèle plusieurs versions primitives de ces objets algébriques qui ont pour nom, en termes modernes, endomorphisme, équation caractéristique, dualité, et nous pourrons donc suivre et comparer le mouvement de ces concepts. J'espère ainsi confirmer qu'il n'est pas sans intérêt de relire les textes postérieurs à la découverte des quaternions, et montrer qu'il est artificiel de diviser en deux grandes périodes la carrière algébrique de Hamilton en opposant le créatif d'avant 1843 et

[7] Un peu plus tard, en février 1847, il écrit au Révérend H. Lloyd : « *Thanks for your thinking of the Poinsot, but I have long had a copy of my own of his* Statique, *with which I was acquainted when an undergraduate. It is, you know, his* Dynamical memoir on rotations *(studied through couples) which I wish to procure and should gladly borrow* » [Graves II, p. 564].

[8] « *All these conclusions have been otherwise obtained by Poinsot. But it is remarkable with what simplicity they are here proved by the method of vectors* » [Hamilton *MS*, n° 70].