*Revue d'histoire des mathématiques,*
4 (1998), p. 73–129.

# DE LAMBERT À CAUCHY : LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LITTÉRALES PAR LE MOYEN DES SÉRIES

Jean-Pierre LUBET (*)

RÉSUMÉ. — En 1770, Lagrange démontre la formule qui porte son nom et qui donne, sous forme de série, l'expression de la racine d'une équation algébrique ou transcendante. La formule elle-même et la méthode de démonstration sont significatives du style et de la pensée de l'auteur de la *Théorie des fonctions analytiques.* De nombreuses études sont consacrées ensuite à ce théorème de Lagrange par d'autres mathématiciens. Elles portent la trace de préoccupations ou d'exigences particulières à leurs auteurs. Elles accompagnent parfois des tentatives théoriques plus ambitieuses. Laplace étudie la convergence des séries que le théorème de Lagrange permet d'obtenir pour la résolution du *problème de Kepler.* Mais ces travaux restent d'abord tributaires des mêmes conceptions, selon lesquelles les fonctions sont identifiées à des développements en séries formelles. Cauchy remet en cause ce point de vue, et c'est un bouleversement profond qui intervient en 1831 lorsqu'il reprend le problème avec les moyens dont il dispose dans le cadre des fonctions de variable imaginaire.

ABSTRACT. — FROM LAMBERT TO CAUCHY : SOLVING EQUATIONS BY MEANS OF SERIES. — In 1770, Lagrange proved the formula bearing his name which expresses the root of an algebraic or transcendental equation as a series. The formula in itself, as well as the method of proof, are representative of the style and thought of the author of the *Théorie des fonctions analytiques.* Afterwards several studies were devoted to *Lagrange's theorem* by other mathematicians. They bore the mark of their authors' particular concerns or demands. Occasionally they conveyed more ambitious theoretical attempts. When solving *Kepler's problem*, Laplace studied the convergence of the series deduced from *Lagrange's theorem.* But, at first, these studies depended on the same conceptions, according to which functions were identified with formal series expansions. In 1831 a profound mutation occured when, calling this point of view into question, Cauchy took up the problem and deployed the tools he had at his disposal in the framework of complex functions.

(*) Texte reçu le 4 septembre 1996, révisé le 18 mars 1998.
Jean-Pierre LUBET, 7 allée du Tardenois, 59650 Villeneuve d'Ascq (France).

## INTRODUCTION

Les 18 janvier et 5 avril 1770, Lagrange lit devant l'Académie des sciences de Berlin la « nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries ». Le titre du mémoire précise bien la nature du problème traité :

- il s'agit d'exprimer les solutions des équations au moyen de séries ;
- les équations sont écrites *a priori* à l'aide de coefficients littéraux

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + \cdots = 0.$$

La problématique qui s'y exprime est nettement distincte de celle que l'on trouve dans d'autres travaux publiés par Lagrange à des dates voisines. En 1769 et 1770, deux mémoires concernaient notamment la recherche d'approximations pour les racines des équations algébriques. L'outil essentiel y était constitué par les fractions continues. En 1772, avec les « Réflexions sur la résolution algébrique des équations », se trouvera concernée la résolution des équations au moyen de radicaux.

En 1770, Lagrange entend résoudre aussi bien des équations algébriques (dans l'écriture précédente, les points de suspension représentent un nombre fini de termes) que des équations transcendantes (le premier membre est alors constitué des termes, en nombre infini, d'une série). Le résultat essentiel est donné par la formule, appelée précisément *formule de Lagrange*, et qui exprime les solutions au moyen d'une série.

Dans le chapitre consacré aux séries au XVIII^e siècle et inclus dans le quatrième volume de l'histoire de Moritz Cantor [1908], E. Netto — qui en est l'auteur — commence par marquer l'embarras dans lequel il se trouve pour rattacher son sujet à tel ou tel domaine des mathématiques. Pour preuve de l'omniprésence des séries, il cite la *formule de Lagrange*, laquelle touche à la fois au calcul différentiel, à la théorie des séries, à l'algèbre et à la combinatoire. Il aurait pu ajouter que Lagrange l'a très vite exploitée pour exprimer la forme des solutions du problème de Kepler [Lagrange 1771a]. Elle jouera un rôle dans la *Mécanique céleste* de Laplace et ce sont les applications à ce domaine qui fourniront à Cauchy l'occasion d'élaborer sa propre démonstration de la formule.

Cette démonstration utilise les principaux concepts — intégrales, résidus — dont Cauchy dispose déjà dans le cadre des fonctions de variable imaginaire et dont il fait usage dans des méthodes de majoration qui constituent le « calcul des limites ». Elle a pu être simplifiée et raccourcie par les interventions d'autres mathématiciens du XIX^e^ siècle. Mais quant aux principes, elle forme aujourd'hui encore la base de ce que l'on peut trouver, en la matière, dans les traités d'analyse[1]. Avant Cauchy, de nombreux autres mathématiciens se sont intéressés à la démonstration de cette formule. Ces recherches n'ont pas laissé dans les mathématiques actuelles des traces aussi évidentes. Mais alors quelle a été leur portée ? Comment est-elle décrite par les historiens des mathématiques ? Avant d'énoncer le résultat obtenu par Lagrange, E. Netto précise que ce dernier «*parvient — sans donner une démonstration de son résultat — à l'importante formule qui, en tant que "formule de réversion de Lagrange", porte son nom*»[2]. Jean Itard évoque l'engouement suscité par la découverte de Lagrange chez Euler, Lexell, d'Alembert, Condorcet, puis il précise : «*les "démonstrations" qu'en donnent Lagrange et ses émules ne sont guère fondées que sur une induction. Laplace en fournira une meilleure preuve*» [Itard 1984, p. 321] ; puis, après avoir nommé d'autres mathématiciens que la formule a occupés dans les années qui ont suivi, il cite un dernier nom : «*Cauchy en étudiera de près les conditions de convergence, complètement passées sous silence par l'inventeur* [...] » [*Ibid.*].

L'article qui suit a pour but d'étudier la formule de Lagrange en prenant les années 1758 et 1841 comme limites chronologiques. En effet, dès 1758 Lambert avait donné un résultat qui, dans le cas particulier des équations trinômes, peut être considéré comme annonciateur de la formule de Lagrange ; en 1841 Cauchy a fait imprimer un mémoire donnant les détails de la méthode présentée, quelque dix années auparavant, à Turin. Sans prétendre à l'exhaustivité, cet article concerne un aspect de l'activité mathématique qui, dans cette période, a été loin d'être marginal. Comment caractériser les travaux de Lagrange et de ses successeurs immédiats ? Quel rôle y joue l'induction ? Peut-on vraiment dire que Lagrange ne se préoccupe pas de convergence ? Les réponses de J. Itard et E. Netto à ces questions éveillent plus qu'elles n'assouvissent notre curiosité, car elles sont sûrement trop rapides et, surtout, elles restent

[1] On peut consulter [Whittaker et Watson 1920, p. 132–133] ou [Dieudonné 1986b, p. 250].

[2] «*Dabei gelangt er, ohne einen Beweis für sein Resultat zu geben, zu der wichtigen Formel, die als "Lagrangesche Umkehrungsformel" seinen Namen trägt*» [Cantor 1908, p. 258].

à l'extérieur de la problématique propre à ces différents travaux. Une confrontation plus poussée avec les textes eux-mêmes conduit à des constats plus précis et plus nuancés. Nous essaierons de les situer dans leur contexte théorique, de saisir, quand cela est possible, les évolutions, de noter les domaines mathématiques dans lesquels ils restent contenus ou au contraire de repérer les frontières qu'ils traversent. L'apport de Cauchy pourra alors apparaître avec ses diverses composantes : prise en compte des travaux de ses prédécesseurs, réflexion critique sur leurs principes, élaboration des concepts constituant un ensemble théorique renouvelé.

## 1. LES MODALITÉS ET LE SENS D'UNE DÉCOUVERTE

### *1.1. L'apparition de la formule de Lagrange dans le* Supplément *de l'*Encyclopédie

En 1776 paraît le premier tome du *Supplément* à l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert. L'article *approximation* est signé de Condorcet. L'une des rubriques de cet article présente «*une méthode d'avoir les valeurs approchées des racines d'une équation algébrique déterminée*». Pour une équation, d'inconnue $x$, écrite sous la forme

$$y - x + \varphi(x) = 0, \tag{1}$$

l'objectif est de chercher «*un moyen général de réduire la valeur de $x$ en série*». Pour une fonction $\psi$ donnée, quelques indications de calcul[3] couvrent à peine une colonne avant d'aboutir à la formule de Lagrange

$$\psi(x) = \psi(y) + \frac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,\varphi(y) + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\,\dfrac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,[\varphi(y)]^2}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{2\cdot 3}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\dfrac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,[\varphi(y)]^3}{\mathrm{d}y^2} + \cdots. \tag{2}$$

[3] Les notations adoptées ici ne sont pas exactement celles de Condorcet ; en particulier, une fidélité plus complète au texte de Condorcet amènerait à écrire le résultat final à l'aide des symboles $\mathrm{d}\psi(y)$ au lieu des quotients différentiels $\mathrm{d}\psi(y)/\mathrm{d}y$.

Le point de départ est constitué par la formule de Taylor appliquée à la fonction pour les valeurs de la variable égales à $y$ d'une part, et à $y+\varphi(x)=x$ d'autre part[4]

$$\varphi(x)=\varphi(y)+\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}\,\varphi(x)+\frac{\mathrm{d}^2\varphi(y)}{2\,\mathrm{d}y^2}\,\big[\varphi(x)\big]^2+\cdots. \tag{3}$$

Condorcet va en déduire la relation

$$\varphi(x)=\varphi(y)+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}[\varphi(y)]^2}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2\cdot 3}\,\frac{\mathrm{d}^2[\varphi(y)]^3}{\mathrm{d}y^2}+\cdots. \tag{4}$$

L'objectif est donc de faire « disparaître » l'inconnue $x$ du second membre de la relation (3). Le texte est sous-tendu par l'idée que l'on peut trouver une suite de fonctions $A_k(y)$ telles que chaque différence $\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n}A_k(y)=R_n(x,y)$ puisse s'exprimer par des puissances de $\varphi(y)$ d'un ordre supérieur à $n$. L'expression de $\varphi(x)$ pourra donc être mise sous la forme

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(y)+R_n(x,y). \tag{5}$$

La présence de l'inconnue sera ainsi restreinte à un « reste » $R_n(x,y)$ dont tous les termes seront de « degré » supérieur à $n$ par rapport à $\varphi(y)$. Et finalement, $\varphi(x)$ sera identifiée à la série $\sum_{k=0}^{n}A_k(y)$. Deux étapes seulement sont décrites. La première est franchie en posant $\varphi(x)=\varphi(y)+B$ et en reportant cette expression dans le second membre de la relation (3) ; l'examen de ce second membre conduit à poser $A_1(y)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}[\varphi(y)]^2}{\mathrm{d}y}$. Le procédé est utilisé une seconde fois avec $\varphi(x)=\varphi(y)+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}[\varphi(y)]^2}{\mathrm{d}y}+C$ ; il permet de trouver $A_2(y)=\dfrac{1}{2\cdot 3}\,\dfrac{\mathrm{d}^2[\varphi(y)]^3}{\mathrm{d}y^2}$. La complexité des calculs augmente vite, mais la simplicité du résultat ouvre la voie à une

[4] Condorcet utilise la dénomination de *théorème de d'Alembert* à son propos, en raison, sans doute, de la démonstration donnée par d'Alembert dans les *Recherches sur différents points importants du système du monde* [1754, tome 1, p. 50] ; c'est seulement à l'article *équation* de l'*Encyclopédie méthodique*, que le théorème sera attribué à Taylor.