Astérisque

C. DELLACHERIE

Théorie générale du potentiel I

Astérisque, tome 236 (1996), p. 109-124

http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__109_0

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Théorie générale du potentiel I

C. Dellacherie

Résumé. — Plus précisément et plus modestement, mais plus longuement, j'avais prévu intituler cet article, dans la lignée de [3], [4] et [5] (en grande partie absorbé),

Rudiments de théorie non (nécessairement) linéaire du potentiel fellerien(ne)

mais, vu les circonstances, je n'ai pu résister à la tentation de réaffirmer mon ambition, mettre à nu les ressorts élémentaires et fondamentaux de toute théorie du potentiel, même si ce projet est encore loin d'être réalisé. Le menu du jour est surtout l'étude du principe du maximum, sous toutes ses formes.

Quasi toute théorie du potentiel sur un espace F a pour essentiel ingrédient l'étude de systèmes d'inéquations de la forme $u \geq u_0$, $Au \geq f_0$ où A est une application d'une partie D de $\overline{\mathbb{R}}^F$ dans $\overline{\mathbb{R}}^F$ vérifiant deux propriétés de monotonie (δ) et (μ) explicitées ci-dessous et qu'on résumera en disant que A est un *dériveur sousmarkovien*; pour fixer les idées, penser au cas $u_0 = f_0 = 0$ et $Au = \sup_t(u - P_t u)$, ou $Au = \limsup_{t \rightarrow 0}(u - P_t u)/t$, où (P_t) est un semigroupe sousmarkovien,

Sauf mention du contraire, nos semigroupes seront linéaires; noter que les dériveurs associés aux semigroupes ont le signe opposé de celui des générateurs infinitésimaux.

les propriétés de monotonie de A étant induites par celles de (P_t) . L'étude de tels systèmes peut être fort variée (construction de solutions, existence et régularité d'une solution minimale, points où les inégalités deviennent des égalités, etc.) et mène à toutes les notions classiques

Du côté des fonctions. La non linéarité fait perdre l'aspect dual, celui des mesures (tout au moins nous ne chercherons pas à y remédier ici).

de théorie du potentiel linéaire (potentiel, réduction, problème de Dirichlet, principes de domination et du maximum) ou souslinéaire (réduite, cône de fonctions, points extrémaux, frontières) tout en y rattachant des choses diverses de l'analyse traditionnelle.

Nous allons étudier dans cette optique l'action d'un dériveur sousmarkovien A sur l'ensemble $C(F)$ des fonctions *continues* (réelles) sur un espace *compact* F (d'où le nom de *fellerien*): que $C(F)$ soit instable (i.e. stable pour inf) jouera un rôle important, et que tout élément de $C(F)$ atteigne ses bornes un rôle crucial. Ce cadre peut sembler trop particulier pour être fructueux. Il n'en est rien: on verra que tout dériveur

sousmarkovien, quoique souvent naturellement défini sur un domaine restreint, peut être étendu à toute fonction (cf la lim sup dans l'exemple ci-dessus, qui aurait pu être une lim inf), et ce que nous établirons sera valable pour toute extension ; d'autre part on peut ramener de nombreuses situations au cas topologique considéré grâce à une compactification idoine (non nécessairement métrisable).

Nous commençons cependant par quelques généralités sur les dériveurs dans un cadre abstrait afin d'avoir les coudées plus franches pour expliquer précisément ce que sera notre cadre fellerien.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES DÉRIVEURS

Étant donné un ensemble E (muni tacitement d'une structure topologique ou mesurable si besoin est) et une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{R}}^E$ (muni de son ordre partiel habituel), une application A de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ sera appelée un *dériveur sur $\mathcal{D}$* si elle vérifie, pour tout $u, v \in \mathcal{D}$ et tout $x \in E$,

$$(\delta) \quad u \leq v \text{ et } u(x) = v(x) \implies Au(x) \geq Av(x)$$

qu'on peut lire *si u est majorée par v , avec égalité en x , alors u est plus "concave" que v en x et qu'on peut reformuler comme suit*

$$u \leq v \implies u < v \text{ sur } \{Au < Av\}.$$

Pour x fixé et u, v variables dans $\mathcal{D}$ vérifiant $u(x) = v(x)$, le dériveur A sera dit *dégénéré en x* si on a toujours $Au(x) = Av(x)$, *plat en x* si $u \leq v$ implique toujours $Au(x) = Av(x)$, et *local en x* si $Au(x) \geq Av(x)$ a lieu dès qu'on a $u \leq v$ sur un voisinage de x .

Si E est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ , tout opérateur linéaire du second ordre elliptique éventuellement dégénéré (en particulier, parabolique), dont le terme du second ordre est affecté du "bon signe" (par exemple, pour $\lambda(x) \in \mathbb{R}_+$, $\nu(x) \in \mathbb{R}$ et $\mu(x)$ forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, $Au(x) = -\lambda(x)\Delta u(x) + \langle \mu(x), \nabla u(x) \rangle + \nu(x)u(x)$ où Δ est le laplacien et ∇ le gradient), est un dériveur local, plat (resp dégénéré comme dériveur) en x s'il y est d'ordre 1 (resp d'ordre 0) ; en fait, (δ) est une formulation abstraite, non linéaire, empruntée à [7], du principe du maximum (ou du minimum) local pour les opérateurs elliptiques du second ordre, lequel caractérise ces opérateurs parmi les opérateurs différentiels linéaires. Voir [2] p.1065 et suivantes.

Lorsque $\mathcal{D}$ est instable, (δ) équivaut évidemment, pour tout $u, v \in \mathcal{D}$, à

$$(\wedge) \quad A(u \wedge v) \geq Av \text{ sur } \{u \geq v\}$$

qui implique $A(u \wedge v) \geq Au \wedge Av$ (une forme du principe de l'enveloppe inférieure), d'où l'intérêt d'étendre le domaine de A pour avoir cette stabilité, même si elle n'est pas naturelle (et si, en fin de compte, elle n'apparaît plus parce qu'on retombe dans le domaine initial).

On a la même chose, mutatis mutandis, pour sup (par exemple, $A(u \vee v) \leq Au \vee Av$) mais cela jouera un rôle bien moindre parce qu'on a choisi de prendre le signe " $\geq$ " dans nos systèmes d'inéquations fondamentaux.

À titre d'exemple, voici une forme du principe complet du maximum (prendre $\alpha = 0$ dans l'énoncé pour retrouver le cas linéaire)

ou plutôt du "superprincipe" de domination habituel en linéaire où l'on compare un potentiel (de fonction positive) à une fonction excessive, le cas de l'énoncé usuel du principe complet du maximum étant celui où la fonction excessive est la somme d'un potentiel et d'une constante positive, ce qui nécessite une situation sousmarkovienne,

qui sera considérablement améliorée plus loin dans notre cadre fellerien.

0 Proposition. *Supposons $\mathcal{D}$ instable et soient $\alpha, u \in \mathcal{D}$ telles que u soit la plus petite solution dans $\mathcal{D}$ du système en w*

$$w \geq \alpha, Aw \geq f \text{ où } f = Au.$$

Alors pour tout $v \in \mathcal{D}$ majorant α on a

$$u \leq v \text{ sur } \{Au > Av\} \implies u \leq v \text{ partout.}$$

Démonstration. Si $w = u \wedge v$, on a $Aw \geq Au$ sur $\{u \leq v\}$ et $Aw \geq Av$ sur $\{u \geq v\}$ d'après ($\wedge$), et donc l'hypothèse $Av \geq Au$ sur $\{u > v\}$ implique $Aw \geq Au$ partout. Si v majore α , on a $w \geq \alpha$, et on conclut $w = u$ par minimalité de u .

Le dérivéur A de domaine $\mathcal{D}$ est dit *sousmarkovien* si $\mathcal{D}$ est stable pour les translations par les constantes positives (en abrégé, est *constable*), i.e. si

$$u \in \mathcal{D} \text{ et } t \in \mathbb{R}_+ \implies u + t \in \mathcal{D},$$

et si on a, pour tout $u \in \mathcal{D}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(\mu) \quad A(u + t) \geq Au;$$

il est dit *markovien en x* si l'inégalité est toujours une égalité en x .

Le cas markovien n'est vraiment intéressant que si $\mathcal{D}$ est stable par les translations par les constantes positives et négatives, ce qui arrive fréquemment d'ailleurs. Par ailleurs, on peut toujours, comme en linéaire, rendre markovien un dérivéur sousmarkovien en adjoignant un point (isolé) δ à E et en identifiant $\mathcal{E}$ aux fonctions sur $E \cup \{\delta\}$ nulles en δ .

Tandis que (δ) permet, pour $u \leq v$, de comparer u et v en un point de contact, (μ) sert à mettre tout couple u, v dans cette situation : si $t = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : u \leq v + s\}$, et si cet inf est atteint en un point x (d'où l'intérêt des fonctions continues sur un espace compact), on a $Au(x) \geq A(v + t)(x)$ par (δ) et $A(v + t)(x) \geq Av(x)$ par (μ), d'où $Au(x) \geq Av(x)$ en combinant les deux propriétés, et $Au(x) = Av(x)$ si A est plat et markovien en x (d'où une forme non linéaire du théorème de Rolle).

La propriété (μ), qui en linéaire signifie que les constantes ≥ 0 sont surharmoniques, peut être affaiblie de sorte à retrouver la condition "il existe une fonction surharmonique > 0 ", en remplaçant le semi-groupe des translations par les constantes positives par une famille continue à un paramètre de transformations tendant convenablement vers l'infini. On se limitera ici au cas sousmarkovien non seulement par simplicité (en particulier, le maximum d'une fonction n'est une entité naturelle en théorie du potentiel que dans ce cas) mais aussi parce qu'il est illustré par de nombreux exemples (comme $Au(x) = \Phi(-\Delta u(x), \nabla u(x), u(x), x)$ sur $C^2(\mathbb{R}^n)$ où Φ est une fonction à $1+n+1+n$ arguments réels croissante en le premier et le $(1+n+1)$ -ième). C'est aussi par simplicité qu'on a supposé le domaine d'un dérivéur

sousmarkovien constable (excluant ainsi a priori $C_0(E)$ pour E localement compact comme domaine); comme on va travailler avec des dériveurs étendus à toute fonction, cela n'apportera aucune gêne.

L'exemple fondamental¹ de dériveur, sousmarkovien, A sur un domaine constable est celui de *dériveur élémentaire, sousmarkovien*, où A s'écrit $I - N$, I étant l'identité et N un opérateur croissant ($u \leq v \Rightarrow Nu \leq Nv$), contractant pour la "norme" uniforme (équivalent à $N(u + t) \leq Nu + t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par croissance). Au moins heuristiquement, c'est la brique à partir de laquelle tous les autres dériveurs sont construits à l'aide des propriétés de stabilité que nous recensons sous forme d'une proposition de démonstration évidente.

1 Proposition. Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou infinie de dériveurs (sousmarkoviens) définis sur un même domaine $\mathcal{D}$ (constable).

a) Si $h(\dots, a_i, \dots)$ est une fonction de $\overline{\mathbb{R}}^I$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, croissante en l'ensemble de ses arguments, alors l'opérateur A défini sur $\mathcal{D}$ par

$$Au(x) = h(\dots, A_i u(x), \dots)$$

est un dériveur (sousmarkovien);

b) Si I est filtrant et si, pour tout $u \in \mathcal{D}$, la limite simple des Au_i existe, alors l'opérateur A défini sur $\mathcal{D}$ par

$$Au(x) = \lim_i Au_i(x)$$

est un dériveur (sousmarkovien).

Quelques conséquences immédiates : l'ensemble des dériveurs sousmarkoviens sur $\mathcal{D}$ est stable par somme finie, par produit par une fonction ≥ 0 , par inf et par sup (ponctuels) quelconques, par lim inf et par lim sup, par mélange, etc. D'où les exemples classiques de dériveurs construits à partir de dériveurs élémentaires à l'aide d'un semigroupe ou d'une résolvante sousmarkoviens, ou encore ceux fournis par les opérateurs elliptiques du second ordre éventuellement dégénérés (cf [5] pour le détail de leur construction à partir des élémentaires).

Voyons, pour terminer les généralités, comment étendre, à deux points de vue différents, un dériveur sousmarkovien A défini sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$: on va voir comment passer de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{E}$, puis, supposant E sous-ensemble d'un ensemble F , comment passer de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F} = \overline{\mathbb{R}}^F$.

Voyons d'abord l'extension de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{E}$, sous la forme d'une proposition de démonstration encore une fois évidente.

2 Proposition. Soit A un dériveur (sousmarkovien) défini sur $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ (constable) et posons, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{E}$, avec $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$,

$$A^\vee u(x) = \sup \{ Av(x), v \in \mathcal{D}, v \geq u, v(x) = u(x) \}$$

$$A^\wedge u(x) = \inf \{ Av(x), v \in \mathcal{D}, v \leq u, v(x) = u(x) \}.$$

Il correspond, du côté des fonctions, à celui de noyau élémentaire de Choquet-Deny en théorie linéaire.