Astérisque

C. BONATTI
R. LANGEVIN

Difféomorphismes de Smale des surfaces

Astérisque, tome 250 (1998)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__250__R3_0>

DIFFÉOMORPHISMES DE SMALE DES SURFACES

C. Bonatti et R. Langevin
avec la collaboration de E. Jeandenans

Résumé. — Ce volume est consacré aux difféomorphismes C^1-structurellement stables (appelés ici *difféomorphismes de Smale*) des surfaces compactes.

Le résultat principal montre que leur dynamique topologique globale (c'est à dire leur classe de conjugaison topologique) admet une présentation combinatoire finie. Pour cela nous considérons les *ensembles hyperboliques saturés* (c'est à dire égaux à l'intersection de leurs variétés invariantes) et nous construisons un voisinage invariant canonique (à conjugaison près) de ces ensembles (leur *domaine*). Nous montrons alors que la dynamique en restriction à un domaine est caractérisée par le *type géométrique* d'une partition de Markov de l'ensemble hyperbolique saturé : il s'agit d'une combinatoire décrivant comment (ordre, position et sens) l'image d'un rectangle de la partition coupe les rectangles de cette partition. La dynamique globale est alors obtenue en recollant les domaines le long de leur bord.

L'une des clefs de la longue démonstration du résultat principal est une analyse détaillée du *dessin des courbes invariantes* des difféomorphismes de Smale des surfaces (c'est à dire de leur position topologique dans la surface). En corollaire du résultat principal, nous montrons que le dessin des courbes invariantes caractérise en grande partie la dynamique topologique.

Certains types géométriques abstraits ne correspondent pas à des difféomorphismes de Smale de surfaces compactes. Nous définissons le *genre* d'un type géométrique abstrait, qui est un minorant du genre de toute surface compacte sur laquelle on peut réaliser le type géométrique comme partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé ; nous caractérisons alors les types géométriques de genre fini.

***Abstract* (Smale diffeormorphisms of surfaces)**. — This work is devoted to the C^1-structurally stable diffeomorphisms (called here *Smale diffeomorphisms*) of compact surfaces.

The main result consists in a finite combinatorial presentation of the global topological dynamics (*i.e.* the class of topological conjugacy) of Smale diffeomorphisms. For that we consider *saturated hyperbolic sets* (*i.e.* hyperbolic sets which are equal to the intersection of their invariants manifolds) and we build some canonical (up to conjugacy) invariant neighbourhood (the *domain*) of these saturated sets. Then we prove

that the dynamics restricted to the domain is characterized by the *geometrical type* of some Markov partition of the hyperbolic set : it is a simple combinatorics describing in which order, position and direction the image of some rectangle of the Markov partition crosses the rectangles. Then the global dynamic is obtained by gluing the domains along their boundary.

One important step of the proof consists in a precise analysis of the topological position (the *pattern*) of the invariant curves of the Smale diffeomorphisms. As a corollary of the main result we get that the pattern of the invariant curves essentially characterizes the dynamics on the domains.

Some of the abstract geometrical types do not correspond to any Smale diffeomorphisms on compact surfaces. We define the genus of a type, as a minorant of the genus of any compact surface on which the type can be realized as the geometrical type of a Markov partition of some saturated hyperbolic set ; then we characterize the geometrical types of finite genus.

Nous dédions ce travail à
Bernadette, Arlette et Michel.

Table des matières

INTRODUCTION

0.1. La théorie qualitative des sytèmes dynamiques

Les dynamiciens aiment à situer l'origine des Systèmes Dynamiques à Henri Poincaré, à la frontière entre le XIX^e et le XX^e siècle. L'objet des systèmes dynamiques était cependant étudié depuis longtemps par les physiciens et les mathématiciens : il s'agit de pouvoir prédire l'évolution à long terme d'un système quand on connaît la loi de son évolution, ce qui permet tout juste de prédire «l'instant d'après». Si la loi d'évolution est une application f, il s'agit de comprendre le comportement, quand le temps n tend vers l'infini, des *orbites* de f, c'est-à-dire des suites $x, f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots$. Si la loi d'évolution est infinitésimale, c'est-à-dire définie par une équation différentielle, un champ de vecteurs X, le théorème de Cauchy Lipschitz permet de définir les orbites $X_t(x)$ pour les petits temps t : le problème est à nouveau de comprendre le comportement de ces orbites quand le temps t tend vers l'infini. Jusqu'à la fin du siècle dernier, la solution semblait devoir passer par la résolution explicite de l'équation différentielle. Poincaré a montré que des raisonnements simples, de nature topologique, permettaient de donner une description qualitative du comportement asymptotique des orbites. Un exemple frappant est le célèbre théorème dit de Poincaré Bendixson, sur les champs de vecteurs de la sphère S^2. Dans le cas de champs de vecteurs analytiques n'ayant qu'un nombre fini de zéros, ce théorème dit que toute orbite obéit à l'un des trois comportements suivants : soit elle «aboutit» à l'un des zéros du champ, soit elle s'enroule autour d'une orbite périodique régulière, soit enfin elle s'enroule sur un cycle singulier qui est un compact connexe formé d'un nombre fini d'orbites régulières joignant chacune deux zéros du champ.

C'est dans les années 60-70 que la théorie des systèmes dynamiques a véritablement pris son essort, autour en particulier de deux théories parallèles : la théorie hyperbolique de Smale, et celle des U-systèmes d'Anosov.

La théorie de Smale est née d'un modèle simple (le «fer à cheval») que Smale a proposé pour comprendre un phénomène découvert par Poincaré : il s'agissait d'une hypothèse géométrique en apparence anodine (une intersection transverse entre deux courbes invariantes d'un même point fixe) qui impliquait l'apparition d'une dynamique extrêmement riche et complexe.

Le paradigme de la théorie d'Anosov est le flot géodésique d'une surface de courbure négative : la théorie des U-systèmes dégage la propriété d'éloignement exponentiel des géodésiques voisines. Dans le langage de Smale, cette propriété est l'hyperbolicité.

Notre travail va consister à classifier ce que l'on pourrait appeler des fers à cheval généralisés. Aussi allons nous détailler dans cette introduction le fer à cheval de Smale et la théorie hyperbolique, ainsi que l'histoire de la naissance de cette théorie.

0.1.1. Au voisinage d'un point fixe, variétés invariantes. — Les orbites les plus simples et les plus remarquables sont bien sûr les points fixes de la dynamique, et le premier pas pour structurer la dynamique d'un système a été de comprendre la dynamique, au voisinage d'un point fixe. On espère alors que la dynamique va être essentiellement donnée par la partie linéaire (de l'application ou du champ de vecteur) au point fixe. Ce sera vrai si cette partie linéaire est *hyperbolique* c'est-à-dire que ses valeurs propres sont toutes de module différent de 1 (cas des difféomorphismes) ou de partie réelle non-nulle (cas des champs de vecteurs). Le lecteur trouvera dans [**PM**, chapter II] un exposé élémentaire de la dynamique locale au voisinage d'un point fixe hyperbolique : la voici en quelques mots.

Une application linéaire inversible L de $\mathbb{R}^n$ dans lui même est dite hyperbolique si toutes ses valeurs propres sont de module différent de 1. La dynamique d'une telle application est très simple, et les orbites des points de $\mathbb{R}^n$ peuvent avoir (au plus) quatre types de comportement :

- L'origine 0, point fixe.
- Les points (différents de l'origine) du sous-espace vectoriel $E^s(L)$, somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de L de module inférieur à 1. Ce sous-espace est caractérisé dynamiquement comme étant l'ensemble des points dont l'orbite positive converge vers l'origine :

$$E^s(L) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{n \to +\infty} L^n(v) = 0 \right\}.$$

  Cet espace s'appellera l'*espace stable* de L.

  Remarquons que tout vecteur $v \in E^s(L) \setminus \{0\}$ a son orbite négative qui tend vers l'infini : $\lim_{n\to-\infty} \|L^n(v)\| = +\infty$.
- Les points (différents de l'origine) du sous-espace vectoriel $E^u(L)$, somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de L de module supérieur à 1. Ce sous-espace est caractérisé dynamiquement comme étant l'ensemble

des points dont l'orbite négative converge vers l'origine :

$$E^u(L) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{n \to -\infty} L^n(v) = 0 \right\}.$$

Cet espace s'appellera l'*espace instable* de L.

Remarquons que tout vecteur $v \in E^u(L) \setminus \{0\}$ a son orbite positive qui tend vers l'infini : $\lim_{n\to+\infty} \|L^n(v)\| = +\infty$.

- Les points de $\mathbb{R}^n \setminus (E^s(L) \cup E^u(L))$: leur orbite positive et leur orbite négative tendent vers l'infini.

Soit f un difféomorphisme d'une variété de dimension n, et p un point fixe de f. Notons L la différentielle de f en p. On dira que p est un *point fixe hyperbolique* si L est une application linéaire hyperbolique. La dynamique locale de f, au voisinage de p, est alors conjuguée (par un homéomorphisme) à celle de sa partie linéaire L (théorème de Hartman et Grobman, voir [**PM**]). Alors il existe un voisinage U du point p tel que les points de U ont quatre comportements possibles :

- Le point p est fixe.
- Tout point $x \in U$ dont tous les itérés positifs $f^n(x), n \geq 0$ restent dans U, a son orbite positive qui converge vers p. On note

$$W^s_{loc}(p) = \{x \in U \mid \forall n \geq 0 f^n(x) \in U\},$$

  et on l'appelle variété stable locale de p. La variété stable locale est homéomorphe à la boule-unité de l'espace stable $E^s(L)$, est une variété différentiable de même classe que f et est tangente en p à cet espace stable. Tout point différent de p dans $W^s_{loc}(p)$ possède un itéré négatif hors de U.
- Tout point $x \in U$ dont tous les itérés négatifs $f^n(x), n \leq 0$ restent dans U, a son orbite négative qui converge vers p. On note

$$W^u_{loc}(p) = \{x \in U \mid \forall n \leq 0, f^n(x) \in U\},$$

  et on l'appelle variété instable locale de p. La variété instable locale est homéomorphe à la boule-unité de l'espace stable $E^s(L)$ et est tangente en p à cet espace stable. Tout point différent de p dans $W^u_{loc}(p)$ possède un itéré positif hors de U.
- Les points de U qui ne sont ni dans la variété stable ni dans la variété instable de U ont leurs orbites positive et négative qui sortent de U.

(Nous renvoyons à [**Sh**] pour une présentation moderne de la construction et la régularité des variétés invariantes. La première démonstration d'existence, en dimension 2, est due à Hadamard [**Ha**] qui donne en trois pages l'idée fondatrice ; la généralisation en dimension plus grande semble due à Perron [**Per1**], [**Per2**], [**Per3**]).

Dans le cas des surfaces (qui est celui qui nous intéresse), un point fixe hyperbolique p est de trois types possibles, suivant que la dimension de sa variété stable est 2, dans