Astérisque

DENIS-CHARLES CISINSKI

Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie

Astérisque, tome 308 (2006)

http://www.numdam.org/item?id=AST_2006__308__R1_0

© Société mathématique de France, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRIQUE 308

**LES PRÉFAISCEAUX COMME
MODÈLES DES TYPES D'HOMOTOPIE**

Denis-Charles Cisinski

Société Mathématique de France 2006

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Denis-Charles Cisinski

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, CNRS (UMR 7539),
Institut Galilée, Université Paris 13, Avenue Jean-Baptiste Clément,
93430 Villetaneuse, France.

E-mail : cisinski@math.univ-paris13.fr

Url : <http://www.math.univ-paris13.fr/~cisinski/>

Classification mathématique par sujets (2000). — 55-02, 18F20, 18G50, 18G55, 18G30, 54B30, 54B40, 55P57, 55P60, 55P92, 55U35, 55U40.

Mots clefs. — homotopie, catégorie de modèles, préfaisceau, catégorie test locale, extension de Kan homotopique, théorie de l'homotopie équivariante.

LES PRÉFAISCEAUX COMME MODÈLES DES TYPES D'HOMOTOPIE

Denis-Charles Cisinski

Résumé. — Grothendieck a introduit dans *À la poursuite des champs* la notion de *catégorie test*, petite catégorie ayant par définition la propriété que les préfaisceaux sur celle-ci sont naturellement des modèles pour les types d'homotopie des CW-complexes. Un exemple bien connu est celui de la catégorie des simplexes (les préfaisceaux correspondant étant alors les ensembles simpliciaux). Grothendieck a de plus dégagé la notion de *localisateur fondamental*, ce qui donne une description axiomatique de la théorie de l'homotopie des petites catégories, et permet d'étendre la notion de catégorie test relativement à des localisations de la catégorie homotopique des CW-complexes. Ce texte peut être vu comme une prolongation de la théorie de l'homotopie de Grothendieck. On démontre en particulier deux conjectures de Grothendieck : toute catégorie de préfaisceaux sur une catégorie test admet canoniquement une structure de catégorie de modèles fermée au sens de Quillen, et le localisateur fondamental minimal définit la théorie de l'homotopie des CW-complexes. On montre par ailleurs comment une version locale de la théorie permet d'englober dans un même schéma la théorie de l'homotopie équivariante. La mise en œuvre de ce programme passe par la construction et l'étude systématiques de structures de catégorie de modèles sur des catégories de préfaisceaux quelconques, ainsi que par l'étude de la théorie de l'homotopie des petites catégories en suivant et en complétant les différentes contributions de Quillen, Thomason et Grothendieck.

Abstract (Presheaves as models for homotopy types). — Grothendieck introduced in *Pursuing Stacks* the notion of *test category*. These are by definition small categories on which presheaves of sets are models for homotopy types of CW-complexes. A well known example is the category of simplices (the corresponding presheaves are then simplicial sets). Moreover, Grothendieck defined the notion of *basic localizer* which gives an axiomatic approach to the homotopy theory of small categories, and gives a natural setting to extend the notion of test category with respect some localizations of the homotopy category of CW-complexes. This text can be seen as a sequel of Grothendieck's homotopy theory. We prove in particular two conjectures made by Grothendieck: any category of presheaves on a test category is canonically endowed with a Quillen closed model category structure, and the smallest basic localizer defines the homotopy theory of CW-complexes. Moreover, we show how a local version of the theory allows to consider in a unified setting the equivariant homotopy theory as well. The realization of this program goes through the construction and the study of model category structures on any category of presheaves on an abstract small category, as well as the study of the homotopy theory of small categories following and completing the contributions of Quillen, Thomason and Grothendieck.

TABLE DES MATIÈRES

Préambule	ix
Introduction	xi
Le principe de contractibilité locale	xi
Vers les catégories test	xiii
Fil d'Ariane	xvii
Notations génériques	xxiv
Partie I. Algèbre homotopique des préfaisceaux	1
1. Constructions de catégories de modèles	3
1.1. Propriétés de stabilité de classes de flèches ou d'objets	3
1.2. Accessibilité	11
1.3. Extensions anodines	23
1.4. A -localisateurs	52
1.5. Propreté	65
1.6. Cofibrations exotiques	74
2. Yoga simplicial	83
2.1. Ensembles simpliciaux	83
2.2. Caractérisation locale de la classe des ∞ -équivalences	100
2.3. Réalisations simpliciales	107
3. Densité homotopique	123
3.1. Propriétés locales des extensions de Kan homotopiques	123
3.2. Préfaisceaux réalisés en catégories	137
3.3. Localisateurs fondamentaux et fibrations de Grothendieck	143
3.4. Régularité	151

Partie II. À la poursuite des modèles	173
4. Correspondances fondamentales	175
4.1. Catégories test locales	175
4.2. Modélisateurs élémentaires	183
4.3. Ubiquité de la propreté	190
4.4. Types d'homotopie localement constants	199
5. Factorisations de foncteurs	213
5.1. Cofibrations formelles	213
5.2. Structures de catégorie de modèles de Thomason	221
5.3. Approximations propres et lisses	227
6. Changements de base homotopiques	233
6.1. Propreté et asphéricité	233
6.2. Critères locaux pour les carrés homotopiquement cartésiens	243
6.3. Transversalité homotopique	249
6.4. Foncteurs localement constants	267
6.5. Systèmes locaux	275
7. Représentations et structures fibrés	283
7.1. Représentations d'un préfaisceau de groupes	283
7.2. Descente et monodromie	289
7.3. Torseurs et fibrations faibles	295
7.4. Classification des toseurs	300
7.5. Fibrés et fibrations	305
Partie III. Zoologies	309
8. Exemples de catégories test locales	311
8.1. Catégories squelettiques	311
8.2. Catégories squelettiques régulières	324
8.3. Ensembles simpliciaux symétriques	332
8.4. Ensembles cubiques	335
8.5. Ensembles cycliques	351
9. Exemples de localisateurs fondamentaux	363
9.1. Troncations de Postnikov et cosquelettes	363
9.2. Types d'homotopie tronqués	364
9.3. Localisateurs fondamentaux triviaux	371
9.4. Homologies, torsions et impropres	373
Bibliographie	377
Index	387
Index des notations	391

Préambule

Le point de départ de ce travail est *À la Poursuite des Champs* [67], manuscrit non publié d'Alexandre Grothendieck dans lequel il déploie sa vision de la théorie de l'homotopie. C'est suite au profond effort de mise en forme de la théorie d'Alexandre Grothendieck fait par Georges Maltsiniotis [96] que ce livre prend sa place.

Ce texte est issu de ma thèse de doctorat, effectuée sous la direction de Georges Maltsiniotis. Il correspond cependant à une version largement réécrite, complétée et approfondie du texte original. Georges Maltsiniotis m'a aidé et soutenu à bien des égards lors de la préparation de ma thèse, ainsi que durant la rédaction de ce livre. De plus, il a bien voulu me laisser inclure dans le premier chapitre ses notes sur les « Propriétés de stabilité de classes de flèches ou d'objets », et ses nombreuses propositions de rédaction ont contribué sensiblement à la clarté d'un certain nombre de passages. En particulier, il a amélioré la définition d'extension anodine en dégageant une axiomatique simple, et sa notion d'équivalence faible absolue a permis une approche conceptuelle de points *a priori* délicats. Pour tout le temps qu'il a consacré à suivre ce travail, et pour m'avoir initié à la théorie de l'homotopie, je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je veux par ailleurs remercier le comité de rédaction d'Astérisque pour sa patience et sa confiance, et en particulier, Pierre Colmez, Yves André et Raphaël Rouquier pour leur soutien et leur attention.

Denis-Charles Cisinski

Paris, le 10 août 2006