Astérisque

JOSEPH AYOUB

Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (I)

Astérisque, tome 314 (2007)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2007__314__R1_0>

ASTÉRISQUE 314

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE (I)

Joseph Ayoub

Société Mathématique de France 2007

J. Ayoub
LAGA, Université Paris 13, CNRS.
E-mail : ayoub@math.univ-paris13.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14-02, 14C25, 14F20, 14F35, 14F42, 18A40, 18F10, 18F20, 18F25, 18G55, 19E15.

***Mots clefs*.** — Motifs, six opérations de Grothendieck, dualité de Verdier, cycles évanescents, $\mathbb{A}^1$-homotopie des schémas, catégories de modèles.

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE (I)

Joseph Ayoub

Résumé. — D'après les travaux de Morel, Voevodsky et d'autres mathématiciens, on dispose de la notion du *type d'homotopie motivique stable* d'un S-schéma lisse. Cet objet vit dans la *catégorie homotopique stable des S-schémas* $\mathbf{SH}(S)$.

Ce travail est divisé en deux volumes et chaque volume en deux chapitres. Dans le premier chapitre, on montre que du point de vue de la fonctorialité, les catégories $\mathbf{SH}(S)$ se comportent comme les catégories dérivées des faisceaux ℓ-adiques. En effet, le formalisme des opérations de Grothendieck f^*,f_*, $f_!$ et $f^!$ s'étend sans changement au monde motivique. Dans le second chapitre, on étudie les propriétés de constructibilité des motifs et on développe la dualité de Verdier. Le troisième chapitre est consacré à la théorie des motifs proches et motifs évanescents. Dans le dernier chapitre, on reprend la construction des catégories $\mathbf{SH}(S)$.

Abstract **(The Grothendieck six operations and the vanishing cycles formalism in the motivic world)**

By the work of Morel, Voevodsky and other mathematicians, one has the notion of the *stable motivic homotopy type* of a smooth S-scheme. This object lives in the *stable homotopy category of S-schemes* $\mathbf{SH}(S)$.

This work consists of two volumes and each of them is divided into two chapters. In the first chapter, we show that from the view point of functoriality, the categories $\mathbf{SH}(S)$ behave like the derived categories of ℓ-adic sheaves. Indeed, the formalism of Grothendieck operations f^*, f_*, $f_!$ and $f^!$ extends to the motivic world. In the second chapter, we study the constructibility of motives and develop Verdier duality. The third chapter deals with the theory of nearby motives and vanishing motives. In the last chapter, we give a self-contained treatment of the construction of the categories $\mathbf{SH}(S)$.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Ce texte, en deux volumes, est essentiellement ma thèse de doctorat augmentée d'un quatrième chapitre traitant la construction et la fonctorialité des catégories motiviques introduites par Morel et Voevodsky.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Fabien Morel qui a dirigé cette thèse et qui m'a beaucoup appris sur les motifs, depuis leurs aspects les plus techniques jusqu'aux conjectures les plus inaccessibles.

Je remercie également Luc Illusie auprès duquel j'ai appris la cohomologie étale et le formalisme des cycles évanescents.

Pendant la préparation de ma thèse j'ai eu l'occasion d'échanger des idées avec beaucoup de mathématiciens : Yves André, Luca Barbieri Viale, Spencer Bloch, Frédéric Déglise, Denis-Charles Cisinski, Dennis Eriksson, Vladimir Guletski, Bruno Kahn, Bernhard Keller, Shun-Ichi Kimura, Bruno Klinger, Marc Levine, Carlo Mazza, Ania Otwinowska, Gereon Quick, Joël Riou, Markus Spitzweck, Alexandr Usnich, Claire Voisin. Je les remercie tous, ainsi que ceux que j'ai oublié de citer, pour ces échanges stimulants.

Je remercie également Jörg Wildeshaus et Jose Ignacio Burgos pour avoir organisé un groupe de travail au CRM sur une partie de ce travail. Leurs remarques ont contribué à la version actuelle du texte.

Je dédie ce travail à Andreea et mes parents Georges et Bouchra.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans ce travail, on étend au cadre motivique une grande partie du formalisme introduit par Grothendieck dans le cadre de la cohomologie étale. On trouvera par exemple la construction des quatre opérations associées à un morphisme quasi-projectif de schémas, les théorèmes de changement de base par un morphisme lisse et pour un morphisme propre, la dualité de Verdier et le formalisme des cycles évanescents. Le texte est divisé en deux volumes et chaque volume en deux chapitres. Chaque chapitre est précédé par une introduction détaillée qui, je l'espère, permettera aux lecteurs de localiser plus efficacement l'endroit des différents résultats.

Dans cette introduction générale, j'essaierai d'expliquer l'utilité de l'arsenal des résultats développés dans ce travail. J'ai à l'esprit au moins deux sortes d'applications :

A-*Étude des motifs généraux par dévissage au cas de motifs plus simples*. — Soit (P) une propriété des motifs que l'on cherche à établir. Une stratégie consiste à étudier les propriétés de permanence de (P) par rapport aux opérations de Grothendieck. Supposons par exemple que (P) est connue pour les motifs de Tate, qu'elle est préservée par les opérations f_* et qu'elle vérifie la propriété « 2 de 3 » dans les triangles distingués. On peut alors utiliser le théorème d'engendrement pour conclure (voir le deuxième chapitre). En effet, ce théorème affirme que les motifs sur un schéma X de type fini sur un corps k s'obtiennent par des colimites homotopiques à partir de certaines images directes de motifs de Tate.

Un autre exemple plus frappant concerne la conjecture de Schur-finitude qui prédit que tout motif est annulé par un foncteur de Schur convenable (variante triangulée de la conjecture de Kimura-O'Sullivan). Les résultats du troisième chapitre montrent que la propriété de Schur-finitude d'un motif est présérvée par le foncteur « motifs proches ». D'autre part, Mazza et Guletski ont montré que la Schur-finitude possède la propriété de 2 sur 3 dans les triangles distingués. Ceci a permis de ramener la Schur-finitude pour les motifs généraux à la Schur-finitude des motifs des hypersurfaces lisses des espaces projectifs. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [**Ayo07**].

B-*Construction de motifs et de classes de cohomologie motivique. Questions de rationalité*. — Un des problèmes importants en géométrie algébrique est la construction d'extensions non-triviales de motifs, voire d'éléments intéressants dans