

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LESCURE

Compactifications équivariantes par des courbes

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 26 (1987)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1987_2_26__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 26.
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 115, 1987, fascicule 1

COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES PAR DES COURBES

par

François LESCURE (*)

RÉSUMÉ

Soit X un espace analytique complexe irréductible et G un groupe de Lie complexe connexe agissant sur X . Si G admet une orbite ouverte Ω cette orbite est dense et $X \setminus \Omega$ est un sous-espace analytique complexe fermé de X qui contient le lieu singulier de X . Si $\dim_{\mathbb{C}} X \setminus \Omega \leq 1$ on dit que X est une compactification $\mathbb{C}$ -analytique équivariante de l'espace homogène Ω par une courbe : l'objet de ce travail est une classification, à isomorphisme près, de toutes les compactifications normales équivariantes par une courbe.

ABSTRACT

Let X be a compact complex irreducible analytic space, and let also G be a complex connected Lie group with an holomorphic action of G on X ; if there is an orbit which is open and such that $X \setminus \Omega$ is a complex analytic space of $\mathbb{C}$ -dimension ≤ 1 , we say that X is an $\mathbb{C}$ -analytic G -equivariant compactification (of Ω) by a curve : the object of this paper is the classification up to isomorphism of such normals $\mathbb{C}$ -analytics equivariants compactifications by curves.

(*) Texte reçu le 30 avril 1986

F. LESCURE, Département de Maths pures et appliquées,
Université de Caen, 14032 CAEN CEDEX

Fondation HUMBOLDT, Ruhr Universität Bochum,
Gebäude NA 150 4er Stock,
4630 BOCHUM, R.F.A.

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	3
1. Preuve de la conjecture d'Huckleberry-Oeljeklaus : le cas de $SL(2, \mathbb{C})$	10
2. Lemme de compacité ; le cas résoluble et le cas général de la conjecture	24
3. Le lemme de fibration ; les 3 cas	32
4. Le 1er cas : classes I et II	36
5. Le 2ème cas : la classe III.....	40
6. Le 3ème cas : classes IV et V	66
Conclusion	86
Bibliographie	87

0. - INTRODUCTION

Soient G un groupe de Lie complexe et Z un espace analytique complexe irréductible (réduit de surcroît comme tous ceux que nous considérerons désormais) sur lequel G agit holomorphiquement à gauche. Si G admet dans Z une orbite Ω d'intérieur non vide, Ω est ouverte et dense et $Z \setminus \Omega$ est un sous-espace analytique fermé de Z . Sous ces hypothèses, on dira que Z est quasi-homogène sous G ou, plus brièvement, G quasi-homogène.

Une situation de cette espèce déjà considérée est celle où Z est une variété algébrique affine sur laquelle un groupe algébrique G opère rationnellement. Dans cette situation, si $x \in \Omega$ a pour stabilisateur le sous-groupe algébrique $H \subset G$, on dira que Z est complétion affine G -équivariante de l'espace homogène quasi-affine $\Omega := G/H$. Un exemple important pour les théoriciens des groupes est celui d'un groupe semi-simple complexe G agissant par l'opération adjointe sur la variété affine Z des éléments nilpotents de son algèbre de Lie (th. de Richardson cf. [40] p. 136).

Une deuxième situation, en quelque sorte opposée à la première, et qui a aussi été considérée, est celle où l'espace analytique Z (resp. chaque composante connexe de $Z \setminus \Omega$) est compact(e) : on dira alors, H étant le stabilisateur (dans G) d'un point $x \in \Omega$, que Z est compactification (resp. semi-compactification) $\mathbb{C}$ -analytique G -équivariante de G/H ou, plus brièvement le contexte étant clair, que Z est G -compactification (resp. G -semi-compactification) de

l'espace homogène G/H .

Si l'espace Z est normal, ou même localement irréductible, le théorème de "connexité locale" de Hilbert-Rückert montre qu'à chaque composante connexe de $Z \setminus \Omega$ correspond exactement un bout (cf. [12] et [7]) de $\Omega = G/H$. On dira alors que Z est G -semi-compactification le long des bouts en question. Notons que si G/H n'a qu'un seul bout toute G -semi-compactification de G/H est en fait une G -compactification.

Ces définitions posées, on se persuade très vite que :

1) Il y a des espace homogènes G/H n'admettant aucune G -compactification : par exemple et de manière élémentaire on pourrait montrer que si Γ est un sous-groupe arithmétique d'un groupe semi-simple S , l'espace homogène S/Γ n'admet aucune S -semi-compactification.

2) Malgré cela toute tentative de classification des espaces homogènes G/H admettant une G -compactification est sans espoir, ainsi a fortiori que toute tentative de classification des espaces analytiques compacts quasi-homogènes.

Des résultats substantiels ont toutefois été obtenus dans cette direction avec des hypothèses restrictives. Ainsi en 1969, Potters (cf. [36] = [Po]) classe toutes les surfaces complexes lisses quasi-homogènes et minimales (au sens de la théorie des surfaces).

On observera que par des suites de modifications et contractions adéquates il est possible, à partir des surfaces de Potters, d'obtenir une telle multitude de surfaces normales quasi-homogènes que la tentative d'une classification, à isomorphisme près, de tels objets apparaît vaine.

Une autre hypothèse restrictive est que la $\mathbb{C}$ -dimension d'une, ou de toute, composante connexe de $Z \setminus \Omega$ soit petite. Comme cette hypothèse sera la nôtre, faisons un rappel plus précis des résultats obtenus et des méthodes utilisées dans cette situation.

En 1977, dans le cas algébrique, Ahiezer (cf. [1]) décrit tous les espaces Z normaux comme ci-dessus pour lesquels $Z \setminus \Omega$ admet une composante réduite à un point. La généralisation (cf. [24]) nettement plus difficile de cette description dans le cas $\mathbb{C}$ -analytique fut obtenue en 1980 par Huckleberry et Oeljeklaus : le résultat est que, si Z est compact (resp. non compact), Z est un cône projectif (resp. affine) de base une variété rationnelle homogène, l'action de G pouvant être "élargie" de telle manière que l'orbite dense soit le complémentaire du sommet.

En 1980 dans une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences, Huckleberry et Oeljeklaus annoncent aussi une classification des Z lisses tels que $\dim_{\mathbb{C}} Z \geq 3$ pour lesquels une composante connexe de $Z \setminus \Omega$ est une courbe. En attendant la publication par ces deux mêmes auteurs d'un ouvrage traitant, en autres, exhaustivement de ce problème, on renverra le lecteur à une version préliminaire (cf. [26] = [H.O.]) publiée par les "Annales de l'Institut Elie Cartan" en 1984.

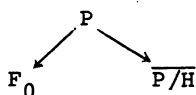
Le but essentiel de ce travail est la généralisation au cas singulier de la classification de Huckleberry-Oeljeklaus (voir le tableau qui conclut cet article). Avant même de donner des indications sur notre démarche, rappelons celle de [H.O.] ; on démontre d'abord le :

LEMME DE FIBRATION. Dans l'hypothèse ci-dessus, si $\Omega := G/H$ est l'orbite ouverte, il existe un sous-groupe parabolique P

(i.e. tel que G/P soit une variété rationnelle homogène) contenant H et tel que la fibre $\cong P/H$ de la fibration $G/H \rightarrow G/P$ soit de $\mathbb{C}$ -dimension ≤ 2 ; la fibration $G/H \rightarrow G/P$ étant de surcroît prolongeable en une méromorphie $Z \dashrightarrow G/P$.

Ce lemme de fibration acquis (en utilisant notamment la fibration de Tits), on observe que $\overline{P/H} \rightarrow Z$ est un sous-espace analytique complexe fermé. On considère alors une modification P -équivariante lisse $F \rightarrow \overline{P/H}$. $\tilde{Z} := G \times^P F$ est alors une variété quasi-homogène sous G et on a une G -modification $\tilde{Z} \rightarrow Z$ induisant un isomorphisme sur les G -orbites ouvertes $\cong \Omega$.

En fonction de la manière dont une partie semi-simple S de G opère sur $\tilde{Z} \setminus \Omega$, se dégagent trois grands cas. Excluant ici la situation $\dim_{\mathbb{C}} P/H = 1$ (d'ailleurs à peu près triviale), on introduit un modèle minimal (au sens de la théorie des surfaces) F_0 de F . La connexité de P (P parabolique !) permet d'introduire le diagramme P -équivariant de modifications :



L'étude des trois grands cas évoqués précédemment consiste, pour chacun d'entre eux, à utiliser intensivement $[Po]$ pour voir les possibilités envisagées pour la surface de Potters F_0 .

L'objet propre de cet article, est l'étude (faite de manière plus exhaustive dans la thèse de l'auteur (Caen (1984) désignée

(*) De manière plus générale, dans ce contexte de lissité, si $Y := Z \setminus \Omega$, $[H.O.]$ montre l'existence d'une fibration $G/H \rightarrow G/P$ (P parabolique) avec $\dim_{\mathbb{C}} P/H < 1 + \dim_{\mathbb{C}} Y$.

désormais $[T]$) des compactifications normales $\mathbb{C}$ -analytiques équivariantes par des courbes. Plus précisément, il s'agit d'une généralisation de $[H.O.]$ qui consiste en la recherche des espaces compacts normaux Z quasi-homogènes d'orbite dense Ω tels que :

- 1) $\dim_{\mathbb{C}} Z \geq 3$
- 2) $\dim_{\mathbb{C}} Z \setminus \Omega \leq 1$

Notre démarche dans ce contexte généralisé est substantiellement la même que dans $[H.O.]$: démonstration du "lemme de fibration" puis étude des trois grands cas à l'aide de la géométrie de la surface de Potters F_0 . Mais, dans le cas singulier, la démonstration du "lemme de fibration" est beaucoup moins évidente que dans le cas lisse. Ce lemme résultera essentiellement dans notre contexte généralisé du Théorème 2.6. qui est l'aboutissement de la première partie de cet article. Or la démonstration de ce théorème, exige deux ingrédients fondamentaux :

- 1) Le Théorème de Barlet (cf. $[5]$) de q -pseudo-convexité (et même de q -complétude), au sens d'Andreotti-Grauert, au voisinage d'un cycle analytique.

- 2) Une conjecture de Huckleberry-Oeljeklaus, déjà annoncée dans $[32]$ et dont nous donnons ici une démonstration "in extenso" et dont une forme faible s'énonce comme suit : si Γ est un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{C})$ il n'existe pas de $SL(2, \mathbb{C})$ -compactification de $SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$ par une courbe.

Bien qu'on ait sur une telle compactification des renseignements de géométrie globale très fins (cf. l'article de Huckleberry-Margulis $[23]$), c'est ici par des considérations de géométrie analytique locale qu'on la démontre, ce qui n'est guère étonnant si on remarque que cette conjecture de H. et O. est elle-même conséquence

de la célèbre conjecture de Lipman-Zariski.

Une autre difficulté spécifique au cas singulier est qu'il nous faudra des renseignements géométriques plus précis sur la surface $\overline{P/H} \longrightarrow Z$ dont H.O. pouvait se dispenser en utilisant des arguments directs résultant de la lissité de Z : cela exigera une étude des surfaces de Hirzebruch modifiées (cf. Chapitres 5 et 6 de la deuxième partie).

Nous obtenons évidemment infiniment plus d'espaces que H.O. n'obtient de variétés. Le cas le plus caricatural à cet égard étant la classe III (cf. Chapitre 5) où nous trouvons une série triple d'espace de $\mathbb{C}$ -dimension arbitraire ≥ 3 alors que H.O. ne trouve que deux variétés lisses toutes deux de $\mathbb{C}$ -dimension égale à trois.

Observons, toujours à propos de la classe III, mais aussi de la classe V, que la géométrie des espaces Z obtenus est probablement trop embrouillée pour qu'on puisse en donner une description vraiment concrète (par exemple comme variété projective définie par des équations). C'est la raison pour laquelle on se contente de décrire une désingularisation équivariante $\tilde{Z} \longrightarrow Z$ en précisant exactement quelles sont les parties de $\tilde{Z}$ qui sont contractées en un point par la modification $\tilde{Z} \longrightarrow Z$.

On obtient au total cinq grandes classes dont on trouvera la liste à la fin de la deuxième partie.

Notons, ici, qu'on aurait pu se poser le problème plus général suivant : quelles sont les $\mathbb{C}$ -semi-compactifications normales d'un espace homogène $\Omega := G/H$ tels qu'une composante de $Z \setminus \Omega$ soit de $\mathbb{C}$ -dimension ≤ 1 . Nous n'avons pas (contrairement à H.O. dans le cas lisse) répondu à cette question, elle est pourtant probablement moins difficile que celle (plus particulière) à laquelle nous avons répondu.

En effet ne subsiste, après notre étude, que le cas où Ω a plus d'un bout. Or c'est la philosophie de [14] (Lemma 2) qu'un espace homogène "générique" n'ait qu'un bout et que, dans un contexte donné assez précis, on puisse comprendre suffisamment la structure géométrique de ceux qui en ont plusieurs.

Nous ne saurions achever cette introduction sans exprimer notre profonde reconnaissance au Professeur Huckleberry : outre que notre démarche d'ensemble est la même que dans le cas lisse, les indications précieuses et patientes du Professeur Huckleberry à l'occasion d'invitations répétées de l'Université allemande, ont constitué des conditions nécessaires à la rédaction de cet article.