FRANCIS M. CHOUCROUN

Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 58 (1994)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1994_2_58__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire 58
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 122, 1994, fascicule 3

ANALYSE HARMONIQUE DES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES DE BRUHAT-TITS

Francis M. CHOUCROUN

Résumé.

Ce mémoire traite des groupes d'automorphismes des arbres homogènes ou semi-homogènes, que l'on appelle arbres Bruhat-Tits.

On considérera les sous-groupes doublement transitifs d'automorphismes d'arbre de Bruhat-Tits, ce sont ceux qui sont fermés et opèrent transitivement sur chaque sphère: on en étudie la structure, qui est analogue à celle des groupes réductifs, puis on en fait l'analyse harmonique en termes représentations irréductibles qui admettent un vecteur invariant non nul par le fixateur d'une arête. Cette théorie s'applique, à la fois au groupe de tous les automorphismes de l'arbre et aux groupes p-adiques simples de rang relatif un. Elle a des applications à certains groupes discrets qui opèrent sur ces arbres, notamment aux groupes libres à un nombre fini de générateurs.

Abstract. This memoir is concerned with the automorphism groups of homogeneous and semi-homogeneous, which we call Bruhat-Tits trees.

We call a group doubly transitive, a subgroup which is closed and acts transitively on each sphere: we study its structure, similar to the case for reductive groups, and form harmonic analysis of irreducible representations, tamely ramified in the sense that they admit a non-zero vector, invariant for elements which pointwise fix an edge.

This theory applies both to the group of all automorphisms of the tree, and to the simple p-adic groups of relative rank one.

It has applications to certain discrete groups, which act on these trees, notably to the free groups with a finite number of generators.

Code AMS:20 B 27; 22 E 35; 22 E 40; 22 E 50; 43 A 85; 43 A 90; 60 J 50.

Texte reçu le 24 mars 1993, révisé le 3 juin 1993
Université Paris-Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay-Cedex, France

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est l'analyse harmonique sur les groupes qui opèrent par automorphismes de façon doublement transitive sur un arbre de Bruhat-Tits.

Suivant la terminologie introduite par Ol'shanskii, on appellera arbre de Bruhat-Tits, soit un arbre semi-homogène[1] de type (q_1, q_2), c'est à dire un arbre bipartite dont au moins la valence d'un sommet est supérieure à 3, soit un arbre homogène de type q avec $q > 1$. Ce dernier cas peut être ramené à un arbre de type $(q, 1)$, grâce à l'artifice qui consiste à rajouter un sommet au "milieu" de chaque arête. Ainsi, ces derniers apparaîtront comme cas particuliers des arbres semi-homogènes.

Pour de tels arbres, on sera amené à étudier l'analyse harmonique du groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes de l'arbre.

Les classes de réseaux de $\mathbb{Q}_p^2$ forment un arbre homogène de type p sur lequel opère $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$, ce qui réalise un analogue non archimédien du demi-plan de Poincaré; cf. [S].

Plus généralement, à un groupe simple G sur un corps local non archimédien est associé par la théorie de Bruhat-Tits un immeuble qui, si le rang relatif de G est un, est un arbre, sur lequel G opère par automorphismes de façon doublement transitive [2]. Dans ce cas, les nombres q_1 et q_2 seront certaines puissances du cardinal du corps résiduel.

Par ailleurs, à certains groupes discrets [3] sont associés des arbres de Bruhat-Tits sur lequels ils opèrent, selon les cas, de façon simplement transitive, sur les sommets (cas des groupes libres), ou sur les sommets de numéro donné, ou sur les arêtes.

L'analyse harmonique de $\mathcal{G}$ permettra d'aider à connaître celle de ces groupes discrets.

Dans ce mémoire on considérera un sous-groupe fermé G du groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes d'un arbre de Bruhat-Tits, qui opère de façon doublement transitive sur les sommets. Ce cadre couvre aussi bien le cas où $G = \mathcal{G}$, que celui des groupes $p-$adique simples de rang un.

Un des objectifs de ce travail sera donc de donner une présentation unifée de résultats concernant ces groupes.

---

[1]voir définitions 1.1.8 et 1.1.9

[2]voir la définition 1.4.1

[3]voir [Ch-1],[Ch-2],[Ch-3] et [M-W], pour des exemples

L'article d'Ol'shanskii a décrit les représentations de $\mathcal{G}$ en insistant plus précisément sur les représentations des séries discrètes, qui n'apparaissent plus sous cette même forme pour les groupes G que l'on va étudier.

Dans son exposé [Ca-3], Cartier a traité le cas des arbres homogènes et des fonctions sphériques, l'aspect représentation étant sous-jacent. Il a donné la formule de Plancherel pour les fonctions sphériques: j'ai d'ailleurs, dans [Ch-1], utilisé ses résultats pour faire le lien avec le groupe libre. Un des objectifs de ce travail est de donner des démonstrations des résultats annoncés par Cartier dans [Ca-3], qui soient valables dans le cas des arbres semi-homogènes; cependant les méthodes employées seront différentes.

Un des premiers résultats sur les arbres de Bruhat-Tits est que le groupe des automorphismes de l'arbre opère transitivement sur l'espace des bouts[4] de l'arbre. Le théorème 1.6.1, et la proposition 1.6.2 montrent que cette condition caractérise essentiellement, parmi les arbres réguliers numérotés, les arbres homogènes et semi-homogènes.

Enfin, on notera que, pour $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$, la plupart des résultats que nous démontrons sont connus depuis longtemps; voir [G-G-P].

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre, où l'on a rassemblé des résultats classiques sur les arbres de Bruhat-Tits, est consacré ensuite à l'étude de la structure des groupes d'automorphismes doublement transitifs de l'arbre.

Soit $\mathcal{A}$ un arbre de Bruhat-Tits, on désigne par Ω l'ensemble des bouts de $\mathcal{A}$, et par $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{A}$.

On se donne un groupe G d'automorphismes de $\mathcal{A}$ qui est doublement transitif au sens de la définition 1.4.1, c'est à dire un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$ transitif sur chaque sphère.

On remarque qu'on peut choisir en particulier $G = \mathcal{G}$.

On note B_ω le fixateur d'un bout $\omega \in \Omega$; dans le cas où G est un groupe $p-$adique, B est un sous-groupe parabolique propre de G. Il existe un homomorphisme canonique $\nu = \nu_\omega$ de B_ω sur $\mathbb{Z}$, défini par la proposition 1.5.1, dont le noyau N_ω correspond dans le cas du groupe $p-$adique au groupe $B^1 = \cap_{\chi \in X(B)} \ker |\chi|$, où $X(B)$ désignant le groupe des caractères rationnels de B.

On appellera sous-groupe d'Iwahori le fixateur d'une arête de $\mathcal{A}$: pour un tel groupe I, les doubles classes $I \backslash G / I$ sont paramétrées par le groupe diédral infini, d'après la proposition 1.5.4, mais il n'y a pas de système de

[4]voir définition 1.2.1

Tits diédral infini correspondant à I, car, si $q_1 = 1$ ou $q_2 = 1$, le groupe I est d'indice deux dans son normalisateur.

On se fixe une géodésique $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, dont on suppose que le sommet x_0 est de numéro 1, elle définit deux bouts $\pm\infty$, on note $B = B_\infty$ le fixateur du bout ∞, et $N = N_\infty \subset B$, et H le sous-groupe de B qui fixe toute la géodésique, et K le fixateur du sommet x_0, enfin I le sous-groupe d'Iwahori qui fixe l'arête $\{x_0, x_1\}$; on choisit un élément $w \in K$ qui échange les bouts $\pm\infty$, et un élément $\tau \in G$, qui opère sur la géodésique par une translation de pas 2, c'est à dire tel que $\tau(x_n) = x_{n+2}$.

Le théorème 1.5.2 établit les décompositions de Cartan, d'Iwasawa, et de Bruhat pour G : une grande partie de la structure des groupes algébriques de rang un est retrouvée.

On a $G = K\tau^{\mathbb{N}}K = K\tau^{\mathbb{Z}}N = B \cup BwB$, et $H = N \cap wNw^{-1}$.

On ne peut pas décrire en général, un groupe qui soit l'analogue du radical unipotent $R_u(B)$ de B, défini quand G est un groupe $p-$adique; dans ce cas $H = B^1 \cap B_-^1$, pour $B_- = B^w$ qui est un parabolique opposé à B, et $N = HR_u(B)$.

N'ayant pas de sous-groupe distingué de B qui soit un facteur direct de H dans N, on ne pourra pas généraliser la théorie du foncteur de Jacquet pour les représentations de G que nous allons construire. L'espace homogène N/H reste un analogue du corps $p-$adique k, identifié à un sous-groupe unipotent de $PGL_2(k)$.

La proposition 1.5.5 donne une relation explicite entre les décompositions de Cartan et d'Iwasawa, et la proposition 1.5.6 décrit en terme de cocycle sur l'arbre les éléments donnés par la décomposition d'Iwasawa.

La relation fondamentale des groupes de rang un a un analogue donné par la proposition 1.5.7. Elle permettra de définir une transformation sur N/H analogue à l'application définie dans le cas $PGL_2(k)$, sur le corps $p-$adique k par $x \mapsto -x^{-1}$: on déterminera même son Jacobien. Enfin le groupe N admet néanmoins une valuation, définie en fait sur N/H, et la transformation de N/H satisfait à des conditions analogues à celles des valuations des données radicielles des groupes $p-$adiques de rang un.

On détermine, au 1.7, les mesures de Haar, et étudie ensuite les formes linéaires $G-$invariantes sur l'espace des fonctions sur G qui vérifient la condition $f(gb) = f(g)\delta^{-1}(b)$, pour $b \in B$ et δ^{-1} le module de B. Ceci permettra de donner des réalisations différentes des séries de représentations étudiées au chapitre 2. On aborde l'aspect probabilités et martingales au 1.9, et on montre que l'espérance conditionnelle relativement à la tribu $\mathcal{B}^n$, qui est naturellement définie sur l'espace des bouts, se décrit (voir corollaire 1.9.3) par une convolution par la fonction caractéristique renormalisée d'un sous-groupe compact $\mathcal{K}^n$. L'espace des bouts est naturellement un espace homogène sous K. La proposition 1.9.5, qui sera utilisée au chapitre 4, décrit cette convolution à gauche, comme convolution à droite par la fonction caractéristique renormalisée d'un groupe $\Gamma_0(p^n)$, qui est l'analogue d'un groupe de congruences.

Un énoncé de ce type met en valeur le caractère central dans les mathématiques, des objets étudiés dans ce mémoire, des considérations de nature combinatoire ayant un sens tant du point de vue arithmétique que probabiliste.

Les idées issues des probabilités seront encore utilisées pour donner une décomposition de $L^2(\Omega)$ adaptée aux opérateurs d'entrelacements.

L'analogue de la fonction c d'Harish-Chandra, qui intervient en de nombreuses occasions dans la théorie, est donnée ici par

$$c_{q_1,q_2}(\lambda) = \frac{1 + \frac{q_2-1}{\sqrt{q_1 q_2}}\lambda^{-1} - \frac{1}{q_1}\lambda^{-2}}{1-\lambda^{-2}}.$$

Le chapitre 2 est consacré à la définition et à l'étude de représentations généralisant ici les séries principales non ramifiées des groupes $p-$adiques.

On donnera trois réalisations de ces représentations et le dictionnaire qui décrit leur relation.

La première réalisation est obtenue comme représentation induite à partir d'un caractère de B. A un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on associe les caractères λ^ν et $\chi_\lambda = \delta^{\frac{1}{2}}\lambda^\nu$de B, et la représentation Π^λ est l'induite unitaire de B à G du caractère λ^ν, c'est à dire l'induite de χ_λ. Cette représentation sera naturellement unitaire si $|\lambda| = 1$. La $\Pi-$réalisation ainsi décrite est attachée à un bout.

L'espace de la deuxième réalisation est un espace de fonctions sur Ω, sur lequel le groupe G opère de façon canonique. On définit les représentations Ω^s de G, via cette action naturelle de G, par une torsion d'une puissance du noyau de Poisson, c'est la $\Omega-$réalisation qui dépend du choix d'une origine dans l'arbre.

Enfin, l'espace de la troisième réalisation est un espace de fonctions sur N/H, dont la description est inspirée de l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré, généralisée par Gelfand à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. C'est le $N/H-$modèle. Bien qu'il soit tout simplement l'image sur N des restrictions à Nw des fonctions Π^λ, il est intéressant à étudier.

On montre, voir théorème 2.4.6, que ces représentations sont toujours de longueur au plus 2, et irréductibles si et seulement si $c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}) \neq 0$.

La méthode, pour démontrer ces résultats, est d'utiliser un sous-groupe ouvert compact J, pour lequel le $G-$module V ainsi que son contragrédient V' possèdent une droite de vecteurs $J-$invariants cycliques, car cela impliquera l'irréductibilité de la représentation V.

Si $\lambda = (\sqrt{q_1 q_2})^{\pm 1}$, on montrera que ces représentations sont de longueur deux, comportant d'une part la représentation unité, d'autre part une représentation que l'on appelera représentation de Steinberg, dont on a deux variantes. Ces deux représentations ont une droite de vecteurs invariants par I.

Si $\lambda = -(\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^{\pm 1}$, d'après la proposition 2.4.7, ces représentations sont de longueur deux: chacune des représentations est associée à un numéro, celle de numéro i possède, pour tout sous-groupe compact fixant un sommet de numéro i, des vecteurs invariants non nuls, mais n'admet aucun vecteur non nul invariant par le fixateur d'un sommet dont le numéro est différent de i.

Dans le cas des arbres homogènes, pour lesquels on a par exemple $q_2 = 1$, le groupe G possède un homomorphisme ε d'ordre 2, de sorte que la représentation de Steinberg coïncide avec une des représentations du type ci-dessus, tordue par ε; ainsi l'étude de la représentation de Steinberg sera un corollaire de l'étude des représentations sphériques qui sera faite au chapitre 3, le sous-groupe compact maximal choisi sera le normalisateur $N(I)$ du groupe d'Iwahori.

L'étude des propriétés de la représentation de Steinberg dans le cas général est un peu plus délicate, et nécessite une étude approfondie, qui sera faite ici. Les représentations de Steinberg possèdent une droite de vecteurs invariants par le sous-groupe d'Iwahori I. La démonstration de leur irréductibilité fait l'objet de la proposition 2.6.1, le calcul du coefficient de ces représentations est fait dans la section 2.7; d'où on en déduira que les représentations de Steinberg sont de carré intégrable, mais non intégrables, enfin on pourra préciser les équivalences entre les diverses réalisations.

Une description plus géométrique de la représentation de Steinberg, dans le cas homogène, sera donnée, en 3.7.1, en utilisant la formule de Plancherel.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des représentations et des fonctions $K-$sphériques, pour un sous-groupe compact maximal K de G.

On s'écartera, pour décrire la mesure de Plancherel de $L^2(K\backslash G/K)$, de la méthode initiée par Cartier dans [Ca-3], qui utilise la relation entre la resolvante et la décomposition spectrale attachée à un opérateur de moyenne, cette méthode a été réutilisée par [Fa-P] dans une situation analogue.

Le rôle essentiel dans ce chapitre est joué par la transformation de Satake.