Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPLÉMENTS SUR LES EXTENSIONS ENTRE SÉRIES PRINCIPALES p-ADIQUES ET MODULO p DE $G(F)$

Julien Hauseux

Tome 145
Fascicule 1

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 161-192

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 145, mars 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
`christian.smf@cirm-math.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`bullsmf@ihp.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (1), 2017, p. 161-192

COMPLÉMENTS SUR LES EXTENSIONS ENTRE SÉRIES PRINCIPALES p-ADIQUES ET MODULO p DE $G(F)$

PAR JULIEN HAUSEUX

RÉSUMÉ. — Nous complétons les résultats de [10]. Soit G un groupe réductif connexe déployé sur une extension finie F de $\mathbb{Q}_p$. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous déterminons les extensions entre séries principales p-adiques et modulo p de $G(\mathbb{Q}_p)$ sans supposer le centre de G connexe ou le groupe dérivé de G simplement connexe. Cela fait apparaître un phénomène nouveau : il peut exister plusieurs extensions non scindées non isomorphes entre deux séries principales distinctes. Nous complétons aussi les calculs d'auto-extensions d'une série principale dans les cas non génériques lorsque le centre de G est connexe. Nous déterminons enfin les extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation « ordinaire » de $G(F)$ (c'est-à-dire obtenue par induction parabolique à partir d'une représentation spéciale tordue par un caractère). Pour cela, nous calculons le δ-foncteur $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)}$ des parties ordinaires dérivées d'Emerton relatif à un sous-groupe de Borel sur une représentation ordinaire de $G(F)$.

ABSTRACT (*Additional results on extensions between p-adic and mod p principal series of* $G(F)$). — We complete the results of [10]. Let G be a split connected reductive group over a finite extension F of $\mathbb{Q}_p$. When $F = \mathbb{Q}_p$, we determine the extensions between unitary continuous p-adic and smooth mod p principal series of $G(\mathbb{Q}_p)$ without assuming the centre of G connected nor the derived group of G simply connected. This shows a new phenomenon: there may exist several non-isomorphic non-split extensions between two distinct principal series. We also complete the computations of self-extensions of a principal series in the non-generic cases when the centre of G is connected. Finally, we determine the extensions of a principal series of $G(F)$ by an "ordinary" representation of $G(F)$ (i.e., parabolically induced from a special representation twisted by a character). In order to do so, we compute Emerton's δ-functor

Texte reçu le 24 mars 2015, modifié le 13 avril 2016 et le 30 mai 2016, accepté le 2 juin 2016.
JULIEN HAUSEUX
Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Extensions, séries principales, parties ordinaires, filtration de Bruhat.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2017/161/$ 5.00

doi:10.24033/bsmf.2733

$\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)}$ of derived ordinary parts with respect to a Borel subgroup on an ordinary representation of $G(F)$.

1. Introduction

Contexte. — Nous rappelons les résultats de [10]. Soient F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et G un groupe réductif connexe déployé sur F. On fixe une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$.

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous avons calculé les extensions entre séries principales continues unitaires de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E en faisant les hypothèses suivantes sur G : son centre est connexe et son groupe dérivé est simplement connexe. Dans cet article, nous traitons le cas général et nous complétons les calculs d'auto-extensions d'une série principale dans les cas non génériques lorsque le centre de G est connexe.

Nous avons également calculé les extensions d'une série principale continue unitaire de $G(F)$ sur E par l'induite parabolique d'un caractères continu unitaire. Dans cet article, nous généralisons ces calculs pour les représentations continues unitaires « ordinaires » de $G(F)$ sur E (c'est-à-dire obtenues par induction parabolique à partir d'une représentation continue unitaire spéciale tordue par un caractère continu unitaire).

Principaux résultats. — Soient $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal déployé. On note $B^- \subset G$ le sous-groupe de Borel opposé à B par rapport à T, Δ les racines simples de (G, B, T) et pour tout $\alpha \in \Delta$, on note s_α la réflexion simple correspondante. On note $\varepsilon : F^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p-adique et $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E. On calcule les Ext^1 dans les catégories abéliennes de représentations continues unitaires admissibles sur E en utilisant les extensions de Yoneda.

Nous calculons tout d'abord les extensions entre séries principales continues unitaires de $G(F)$ sur E. Lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$, ces extensions proviennent toujours d'une extension entre caractères de $T(F)$ (voir [10, théorème 1.2]). On suppose donc $F = \mathbb{Q}_p$ et on généralise [10, théorème 1.1].

En comparaison si le groupe dérivé de G n'est pas simplement connexe, alors G n'admet pas nécessairement un « twisting element » θ (par exemple $G = \mathrm{PGL}_2$) et si le centre de G n'est pas connexe, alors on peut avoir

$$\operatorname{card}\left\{\alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)\right\} > 1$$

avec $\chi, \chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires distincts (voir l'exemple 3.2.3).

Nous démontrons le résultat suivant (théorème 3.2.1), ainsi que son analogue modulo p (c'est-à-dire dans les catégories de représentations lisses admissibles sur le corps résiduel k_E de E).

Théorème 1.1. — *Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

(i) *Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ, alors*

$$\dim_E \operatorname{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) = \operatorname{card}\left\{\alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)\right\}.$$

(ii) *Si $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ pour tout $\alpha \in \Delta$, alors le foncteur $\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E-linéaire*

$$\operatorname{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

Sans l'hypothèse de généricité du point (ii), le foncteur $\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection E-linéaire et on donne un minorant et un majorant de la dimension de son conoyau (voir le point (ii) de la remarque 3.2.2).

Lorsque le centre de G est connexe, nous complétons les calculs d'auto-extensions d'une série principale modulo p dans les cas non génériques (théorème 3.2.4) et nous en déduisons le résultat analogue p-adique lorsque $p \neq 2$ (corollaire 3.2.6).

Théorème 1.2. — *On suppose le centre de G connexe. Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to k_E^\times$ un caractère lisse.*

(i) *Si $p \neq 2$, alors le foncteur $\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\operatorname{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

(ii) *Si $p = 2$, alors le foncteur $\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection k_E-linéaire*

$$\operatorname{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

dont le conoyau est de dimension $\operatorname{card}\{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha(\chi) = \chi\}$.

Corollaire 1.3. — *On suppose le centre de G connexe et $p \neq 2$. Pour tout caractère continu unitaire $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$, le foncteur $\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E-linéaire*

$$\operatorname{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

Nous étendons enfin nos calculs aux extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation ordinaire de $G(F)$ (propositions 3.3.6 et 3.3.8).