MÉMOIRES DE LA SMF 103

FEUILLETAGES ET ACTIONS DE GROUPES SUR LES ESPACES PROJECTIFS

Julie Déserti
Dominique Cerveau

Société Mathématique de France 2005
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Déserti
IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France.
E-mail : `julie.deserti@univ-rennes1.fr`

D. Cerveau
IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France.
E-mail : `dominique.cerveau@univ-rennes1.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 37F75, 32M05, 32M17, 32M25, 32S65.

***Mots clefs*. —** Feuilletage holomorphe, action de groupes, théorie des invariants, calcul formel.

FEUILLETAGES ET ACTIONS DE GROUPES SUR LES ESPACES PROJECTIFS

Julie Déserti, Dominique Cerveau

Résumé. — Un feuilletage holomorphe $\mathscr{F}$ sur une variété compacte complexe M est un $\mathscr{L}$-feuilletage s'il existe une action d'un groupe complexe G telle que les feuilles génériques de $\mathscr{F}$ soient les orbites de G. On s'intéresse essentiellement au cas de la codimension un sur les espaces projectifs dans l'esprit de la théorie des invariants qui ici peuvent être transcendants. On s'attache à présenter des exemples et des résultats de classification en petite dimension.

***Abstract* (Foliations and group actions on projective spaces).** — A holomorphic foliation $\mathscr{F}$ on a compact complex manifold M is said to be an $\mathscr{L}$-foliation if there exists an action of a complex Lie group G such that the generic leaf of $\mathscr{F}$ coincides with the generic orbit of G. We study $\mathscr{L}$-foliations of codimension one, in particular in projective space, in the spirit of classical invariant theory, but here the invariants are sometimes transcendental ones. We give a list of examples and general properties. Some classification results are obtained in low dimensions.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie classique des invariants, au sens où l'on peut l'entendre au XIX$^{\text{e}}$ siècle, propose étant donnée une action algébrique d'un groupe algébrique G sur une variété algébrique compacte M de décrire le corps des fonctions rationnelles R sur M invariantes sous l'action de G.

Parmi les pionniers de la théorie des invariants, on retiendra en particulier Sylvester et Hesse, puis Gordan et Noether qui font une approche que l'on qualifierait aujourd'hui d'effective. Ces travaux accompagnent le développement de l'algèbre linéaire, de la théorie des matrices et de la géométrie projective. Cette approche change radicalement, non sans polémique, avec les travaux de Hilbert et Hurwitz.

La géométrie classique produit tout un folklore d'exemples. Nous en rappelons certains, en liaison avec la classification des objets algébriques ; l'un des plus populaires est sans doute l'invariant j des courbes elliptiques que l'on peut voir de différentes manières : action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur :

$$\mathbf{C}\mathbb{P}(4) \simeq \{\text{quadruplets de points sur la sphère de Riemann}\}$$

ou action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ sur :

$$\mathbf{C}\mathbb{P}(9) \simeq \{\text{courbes de degré 3 dans } \mathbf{C}\mathbb{P}(2)\}$$

etc. Nous mentionnerons aussi l'exemple de Gordan-Noether en réponse à une affirmation de Hesse. L'ubiquité de cet exemple est tout à fait étonnante.

Dans tout le discours qui suit les objets sont définis sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Si $\mathrm{Aut}\, M$ désigne le groupe des automorphismes de M, on dispose d'un morphisme $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}\, M$ et R est invariante si :

$$R(\varphi(g) \cdot m) = R(m)$$

pour tout $m \in M$ et $g \in G$. Si $\chi(M)$ désigne l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur M, on sait, lorsque M est compacte, que $\chi(M)$ est une $\mathbf{C}$-algèbre de Lie de dimension finie qui s'identifie naturellement à $\mathscr{L}ie(\mathrm{Aut}\, M)$. Par suite, φ induit un morphisme d'algèbres de Lie :

$$D\varphi\colon \mathscr{L}ie\, G \longrightarrow \mathscr{L}ie(\operatorname{Aut} M) \simeq \chi(M)$$

et produit une sous-algèbre de Lie de $\chi(M)$: l'image de $D\varphi$. Notons que l'action de G sur M produit un « feuilletage » singulier $\mathscr{F}$ de la variété M. Nous dirons que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage ; nous noterons $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ la sous-algèbre de $\chi(M)$ associée à $\mathscr{F}$. Évidemment ce feuilletage peut être trivial, par exemple lorsque l'action est transitive ou à l'inverse lorsque G est un groupe discret. On s'intéressera au cas où ce feuilletage est de codimension 1 dans une situation générale, en particulier lorsque l'action n'est plus algébrique, c'est-à-dire lorsque les feuilles sont transcendantes. Sur une variété algébrique M compacte, un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension 1 est associé à une 1-forme fermée rationnelle Ω. C'est une conséquence à peu près directe du fait que le groupe d'automorphismes de M est algébrique. Comme nous l'a signalé S. Cantat, ce résultat persiste si M est compacte kählerienne. Par contre ce n'est plus vrai dans le cas non kähler. L'exemple le plus standard est le suivant : soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ un sous-groupe discret cocompact. La variété $M = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$ est munie d'un $\mathscr{L}$-feuilletage correspondant à l'action du groupe triangulaire sur M. Ce feuilletage n'est pas défini par une 1-forme fermée mais est « transversalement projectif ». Il est probable que ce soit un fait général, ceci étant conforté par un résultat récent de [**4**].

Donnons maintenant quelques propriétés des $\mathscr{L}$-feuilletages de codimension 1 sur les espaces projectifs $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ (chapitre 1). Le degré d'un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ est majoré par $n-1$; lorsqu'il est maximal, on a alors $\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}} = n-1$ et on peut profiter pour n petit de la classification des algèbres de Lie pour donner une description des « invariants généralisés » de $\mathscr{F}$. Par invariant généralisé on entend une primitive de la forme fermée rationnelle Ω définissant $\mathscr{F}$ ou toute fonction « élémentaire » intégrale première de $\mathscr{F}$. Remarquons que les feuilles d'un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ sont dominées par $\mathbf{C}^{n-1}$; il suffit de choisir $n-1$ éléments génériques $X_1, \ldots, X_{n-1}$ dans $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ et de considérer l'application :

$$(t_1, \ldots, t_{n-1}) \longmapsto \exp(t_1 X_1) \circ \cdots \circ \exp(t_{n-1} X_{n-1})(z)$$

qui est d'image dense dans la feuille passant par z. Ceci explique pourquoi les formes fermées Ω intervenant ici sont très spéciales ; par exemple le complément des pôles de Ω (les pôles sont invariants par $\mathscr{F}$) ne peut être Kobayashi hyperbolique. Les feuilles d'un $\mathscr{L}$-feuilletage peuvent être denses ou d'adhérence des variétés réelles Levi-plates singulières.

Nous montrons qu'un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, $n \geqslant 3$, possédant un point singulier isolé est nécessairement de degré 1 et que dans une carte affine ad-hoc les feuilles sont les niveaux d'une forme quadratique de rang maximum. C'est une conséquence plus ou moins directe du théorème de Frobenius singulier de B. Malgrange. Ce résultat devrait avoir un analogue en codimension supérieure.

Nous décrivons ensuite quelques propriétés des $\mathscr{L}$-feuilletages liées à la nature algébrique de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$. Par exemple si tous les éléments de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ sont nilpotents, le feuilletage associé possède une intégrale première rationnelle. Il faut cette hypothèse forte car même dans le cas abélien ce résultat ne persiste pas. Modulo des hypothèses de régularité naturelles et nécessaires, si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est résoluble, $\mathscr{F}$ possède un hyperplan invariant. Enfin si $[\mathscr{L}_{\mathscr{F}}, \mathscr{L}_{\mathscr{F}}] = \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$, ce qui est le cas si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est semi-simple, alors $\mathscr{F}$ possède encore un invariant rationnel.

Le chapitre 2 est consacré à la description d'exemples, issus d'actions de groupes, pour la plupart classiques.

Dans le chapitre 3 nous montrons que les feuilletages de degrés 0 et 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ sont des $\mathscr{L}$-feuilletages. Nous donnons la liste des invariants généralisés correspondants. Nous présentons quelques exemples de $\mathscr{L}$-feuilletages de codimension supérieure à un.

Le chapitre 4 est consacré à la description complète des $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. De cette étude on peut déduire le théorème suivant :

Théorème 0.1. — *Soit G un groupe de Lie complexe connexe agissant sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. On est dans l'un des cas suivants :*

(i) *l'action est triviale,*

(ii) *il existe une orbite de dimension 3,*

(iii) *l'orbite générique est de dimension 2 et l'action de G possède un invariant généralisé (fonction constante sur les feuilles, éventuellement multivaluée) appartenant à conjugaison près à la liste qui suit :*

$$z_0^{\lambda_0} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \quad \textit{où} \quad \sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 0, \quad z_0^{\lambda_0} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} z_3^{\lambda_3} \quad \textit{où} \quad \sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 0, \quad \frac{z_0}{z_1},$$

$$\frac{z_1}{z_3} \exp\left(\frac{z_0 z_3 + z_2 z_1}{z_1 z_3}\right), \quad \frac{z_0}{z_3} \exp\left(\frac{z_2^2 - z_1 z_3}{z_3^2}\right), \quad \frac{z_0}{z_3} \exp\left(\frac{z_2^2 - z_1 z_3}{z_0 z_3}\right),$$

$$\frac{z_1 z_3^{\kappa-1}}{z_0^{\kappa}} \exp\left(\frac{z_2}{z_3}\right), \quad \frac{z_0}{z_1} \exp\left(\frac{z_2}{z_1}\right), \quad \frac{z_3^2}{z_1 z_3 - z_2^2} \exp\left(\frac{z_0}{z_3}\right),$$

$$\frac{z_2}{z_3} \exp\left(\frac{z_0 z_3 - z_1 z_2}{z_3^2}\right), \quad \frac{z_0 z_3 - z_1 z_2}{z_3^2} \exp\left(\frac{z_2}{z_3}\right),$$

$$\frac{Q}{z_0^2} \quad \textit{où } Q \textit{ est une forme quadratique},$$

$$\frac{z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3}{z_3^3}, \quad \frac{z_0^2 z_3^{2\kappa}}{z_3^2 (z_1 z_3 - z_2^2)^{\kappa}}, \quad \frac{z_0 z_3 + z_2 z_1}{z_1 z_3},$$

$$\frac{(z_0 z_3^2 - z_1 z_2 z_3 + \frac{z_2^3}{3})^2}{(z_1 z_3 - \frac{z_2^2}{2})^3} \quad \textit{et} \quad \frac{(z_0 z_3 - z_1 z_2)^{\kappa}}{z_2^{\kappa+1} z_3^{\kappa-1}} \quad \textit{avec } \kappa \neq \pm 1$$

où κ et les λ_i désignent des nombres complexes non nuls.

(iv) *l'orbite générique est de dimension 1 ; le feuilletage associé est celui d'un champ de vecteurs linéaire.*

Ce théorème permet d'envisager une description topologique systématique des feuilles des $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$.

On note l'étrange fait suivant : toutes les surfaces invariantes qui apparaissent ci-dessus (ce sont les pôles de Ω) sont données par les zéros de polynômes à coefficients entiers.

Rappelons qu'un polynôme $P \in \mathbf{C}[z_1, \dots, z_n]$ est dit minimal s'il est à fibre générique connexe. Tout polynôme P se factorise comme suit : $P = p(Q)$ où $p \in \mathbf{C}[t]$ et Q est un polynôme minimal.

Du théorème précédent on déduit le :

Corollaire 0.2. — *Soit $P \in \mathbf{C}[z_1, z_2, z_3]$ un polynôme minimal ; notons :*

$$G^P := \{g \colon \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^3 \text{ affine}, P \circ g = P\}.$$

On suppose que l'orbite générique de G^P est de dimension 2, i.e. P est précisément l'invariant de G^P. Alors, à conjugaison, près P appartient à la liste qui suit :

$$z_0, \quad z_0^{p_0} z_1^{p_1} z_2^{p_2}, \quad z_0^{p_0} z_1^{p_1}, \quad Q, \quad z_0 + z_1 z_2 + z_2^3$$

où Q désigne un polynôme de degré 2 et les p_i des entiers premiers entre eux.

Le chapitre 5 est consacré aux $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 2. Actuellement nous n'en avons pas la description générale pour $n \geqslant 4$. On présente quelques exemples et on traite certains cas spéciaux.

Dans le chapitre 6 on propose ce qui devrait être la classification des $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Comme on l'a dit $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est ici de dimension 3. Nous avons utilisé le logiciel Maple pour décrire certaines sous-algèbres résolubles de dimension 3 de l'algèbre des matrices complexes 5×5. Une fois cette description, c'est-à-dire les différentes possibilités d'algèbres $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$, obtenue, les calculs des invariants sont localement triviaux mais très lourds. Nous en avons présenté quelques-uns, même au risque de rebuter le lecteur... La taille des calculs explose de la dimension 3 à la dimension 4 et certains « résultats » ne seront finalement que des observations. Toutefois même si l'on ne peut prétendre obtenir des énoncés au sens classique, ceci permet de présenter une grande liste d'exemples que l'on peut espérer être exhaustive. Bien sûr, chaque fois qu'un énoncé dépend de l'utilisation de Maple, nous le signalerons.

Précisons tout de même quelques résultats sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ alors l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ fait partie de la liste suivante :

(1) $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$,
(2) $\mathbf{C}^3$,
(3) $\mathscr{L}_\alpha$ dont la présentation est $\{[X, Y] = Y, [X, Z] = \alpha Z, [Y, Z] = 0\}$,
(4) $\mathscr{L}_0 = \mathbf{C} \oplus A$ où A est l'algèbre de Lie du groupe affine.

On note qu'il manque ici quelques algèbres de dimension 3 ; en fait ce sont des dégénérescences des précédentes qui ne produisent pas de $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 3. C'est le traitement des cas 3 et 4 qui a nécessité l'usage de Maple ; nous n'avons pas établi de programme spécifique mais seulement utilisé certaines commandes Maple.