Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 111
Nouvelle série

FONCTEURS EN GRASSMANNIENNES, FILTRATION DE KRULL ET COHOMOLOGIE DES FONCTEURS

Aurélien DJAMENT

2 0 0 7

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 37 € ($ 55)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-248-8

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 111

FONCTEURS EN GRASSMANNIENNES, FILTRATION DE KRULL ET COHOMOLOGIE DES FONCTEURS

Aurélien Djament

Société Mathématique de France 2007
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

A. Djament
LAGA, Institut Galilée, université Paris 13, 99 avenue J.-B. Clément,
93430 Villetaneuse (France).
E-mail : `djament@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://www.math.univ-paris13.fr/~djament/`

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** **–** 16P60, 18A25, 18G15, 20C33; 16E20, 16P40, 18A40, 18C15, 18D15, 18E35, 18G05, 19D99, 55S10.

Key words and phrases. **–** Catégories de foncteurs, algèbre homologique, filtration de Krull, groupes linéaires sur les corps finis, grassmanniennes, objets noethériens, K-théorie stable, représentations modulaires, foncteur différence et filtration polynomiale, (co)monades.

L'auteur témoigne sa chaleureuse reconnaissance à Geoffrey Powell pour l'attention qu'il a portée à ce travail, tant sur le fond que sur la forme, durant toutes les étapes de sa réalisation. Il remercie également Lionel Schwartz et Christine Vespa pour leurs utiles conseils.
Ce travail a été partiellement soutenu par le contrat INTAS 03513251.
Cet article est une version fusionnée des prépublications [**Dja06a**], [**Dja06b**], qui reprennent la thèse de doctorat de l'auteur ([**Dja06c**]).

FONCTEURS EN GRASSMANNIENNES, FILTRATION DE KRULL ET COHOMOLOGIE DES FONCTEURS

Aurélien Djament

Abstract. – Soit $\mathscr{F}$ la catégorie des foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini. Les *catégories de foncteurs en grassmanniennes* sont obtenues en remplaçant la source de cette catégorie par la catégorie des couples formés d'un espace vectoriel et d'un élément d'une de ses grassmanniennes. Ces catégories possèdent une très riche structure algébrique ; nous étudions notamment leurs objets finis et leurs propriétés homologiques.

Nous établissons ainsi une propriété très générale d'annulation en cohomologie des foncteurs, que nous appliquons à la K-théorie stable des corps finis : nous obtenons une généralisation du théorème de Betley-Suslin exprimant des groupes d'extensions entre GL_∞-modules en terme de cohomologie des foncteurs.

Notre seconde application des catégories de foncteurs en grassmanniennes a trait à la filtration de Krull de la catégorie $\mathscr{F}$. Nous en donnons une description conjecturale, dont nous examinons les conséquences, très puissantes, sur la structure de la catégorie $\mathscr{F}$. À l'aide d'outils dus à G. Powell, nous démontrons une forme faible de cette conjecture, dans le cas où le corps de base a deux éléments. Nous utilisons ce résultat pour établir le caractère noethérien de nouveaux foncteurs.

***Résumé* (Grassmannian functors, Krull filtration and functor cohomology)**

Let $\mathscr{F}$ be the category of functors between vector spaces over a finite field. The *grassmannian functor categories* are obtained by replacing the source of this category by the category of pairs formed by a vector space and an element of one of its grassmannians. These categories have a very rich algebraic structure ; we study in particular their finite objects and their homological properties.

We give so a very general vanishing property in functor cohomology, which we apply to the stable K-theory of finite fields : we obtain a generalization of the theorem of Betley-Suslin which expresses certain extension groups of GL_∞-modules in term of functor cohomology.

Our second application of the grassmannian functor categories concerns the Krull filtration of the category $\mathscr{F}$. We give a conjectural description of this filtration, of which we explore powerful implications. With the help of tools due to G. Powell, we show a weak form of this conjecture, in the case where the basis field has two elements. As a consequence, we establish the noetherian character of new functors.

CONTENTS