
Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 111
Nouvelle série

**FONCTEURS
EN GRASSMANNIENNES,
FILTRATION DE KRULL ET
COHOMOLOGIE DES FONCTEURS**

Aurélien DJAMENT

2 0 0 7

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE	Charles FAVRE
Emmanuel BREUILLARD	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhem SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 37 € (\$ 55)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € (\$ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2007

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X
ISBN 978-2-85629-248-8

Directrice de la publication : Aline BONAMI

**FONCTEURS EN GRASSMANNIENNES,
FILTRATION DE KRULL ET
COHOMOLOGIE DES FONCTEURS**

Aurélien Djament

A. Djament

LAGA, Institut Galilée, université Paris 13, 99 avenue J.-B. Clément,
93430 Villetaneuse (France).

E-mail : djament@math.univ-paris13.fr

Url : <http://www.math.univ-paris13.fr/~djament/>

2000 Mathematics Subject Classification. – 16P60, 18A25, 18G15, 20C33; 16E20, 16P40, 18A40, 18C15, 18D15, 18E35, 18G05, 19D99, 55S10.

Key words and phrases. – Catégories de foncteurs, algèbre homologique, filtration de Krull, groupes linéaires sur les corps finis, grassmanniennes, objets noethériens, K -théorie stable, représentations modulaires, foncteur différence et filtration polynomiale, (co)monades.

L’auteur témoigne sa chaleureuse reconnaissance à Geoffrey Powell pour l’attention qu’il a portée à ce travail, tant sur le fond que sur la forme, durant toutes les étapes de sa réalisation. Il remercie également Lionel Schwartz et Christine Vespa pour leurs utiles conseils.

Ce travail a été partiellement soutenu par le contrat INTAS 03513251.

Cet article est une version fusionnée des prépublications [Dja06a], [Dja06b], qui reprennent la thèse de doctorat de l’auteur ([Dja06c]).

FONCTEURS EN GRASSMANNIENNES, FILTRATION DE KRULL ET COHOMOLOGIE DES FONCTEURS

Aurélien Djament

Abstract. – Soit \mathcal{F} la catégorie des foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini. Les *catégories de foncteurs en grassmanniennes* sont obtenues en remplaçant la source de cette catégorie par la catégorie des couples formés d'un espace vectoriel et d'un élément d'une de ses grassmanniennes. Ces catégories possèdent une très riche structure algébrique ; nous étudions notamment leurs objets finis et leurs propriétés homologiques.

Nous établissons ainsi une propriété très générale d'annulation en cohomologie des foncteurs, que nous appliquons à la K -théorie stable des corps finis : nous obtenons une généralisation du théorème de Betley-Suslin exprimant des groupes d'extensions entre GL_∞ -modules en terme de cohomologie des foncteurs.

Notre seconde application des catégories de foncteurs en grassmanniennes a trait à la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F} . Nous en donnons une description conjecturale, dont nous examinons les conséquences, très puissantes, sur la structure de la catégorie \mathcal{F} . À l'aide d'outils dus à G. Powell, nous démontrons une forme faible de cette conjecture, dans le cas où le corps de base a deux éléments. Nous utilisons ce résultat pour établir le caractère noethérien de nouveaux foncteurs.

Résumé (Grassmannian functors, Krull filtration and functor cohomology)

Let \mathcal{F} be the category of functors between vector spaces over a finite field. The *grassmannian functor categories* are obtained by replacing the source of this category by the category of pairs formed by a vector space and an element of one of its grassmannians. These categories have a very rich algebraic structure; we study in particular their finite objects and their homological properties.

We give so a very general vanishing property in functor cohomology, which we apply to the stable K -theory of finite fields : we obtain a generalization of the theorem of Betley-Suslin which expresses certain extension groups of GL_∞ -modules in term of functor cohomology.

Our second application of the grassmannian functor categories concerns the Krull filtration of the category \mathcal{F} . We give a conjectural description of this filtration, of which we explore powerful implications. With the help of tools due to G. Powell, we show a weak form of this conjecture, in the case where the basis field has two elements. As a consequence, we establish the noetherian character of new functors.

CONTENTS

Introduction	xi
Les catégories de foncteurs en grassmanniennes : structures fondamentales ..	xiii
Applications : algèbre homologique et filtration de Krull	xvi
Organisation de l'ouvrage	xx
Notations et conventions	xx
 Part I. Préliminaires	 1
1. Rappels sur la catégorie \mathcal{F}	3
1.1. Généralités	3
Décomposition scalaire et tors de Frobenius	4
Changement de corps	4
1.2. La conjecture artinienne	4
1.3. Le foncteur différence et les objets polynomiaux de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$	5
Filtration polynomiale	7
1.4. Les objets simples de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$	8
Quelques propriétés des objets simples de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$	9
Objets simples de \mathcal{F} et représentations des groupes linéaires	10
1.5. Les foncteurs $\tilde{\mathcal{V}}_n : \mathcal{F}(\mathbb{F}_2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$ de Powell	11
 2. La catégorie \mathcal{F}_{surj}	 13
2.1. Généralités	14
Décomposition scalaire et tors de Frobenius	15
Changement de corps	16
Produit tensoriel total	16
2.2. Foncteur de décalage et objets finis	18
2.3. Le foncteur $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$	21
Le foncteur d'oubli $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$	22
L'adjonction entre les foncteurs o et ϖ	23
Une propriété homologique du foncteur ϖ	26
Foncteurs de Powell	27
Liens avec la conjecture artinienne	29
2.4. Liens avec les systèmes de coefficients	30
Les catégories $\mathcal{C}oef^{lf}$ et $\mathcal{C}oef/\mathcal{C}oef^{lf}$	32

3. Catégories de comodules sur un foncteur en coalgèbres de Boole ..	35
3.1. La catégorie de comodules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$	36
3.2. Recollements de catégories de comodules	39
3.3. La catégorie de modules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{/X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$	41
4. Les catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{Pl}, n}^f$	45
4.1. Définition des catégories et foncteurs utilisés	45
4.2. Propriétés des foncteurs fondamentaux	50
4.3. Propriétés de structure des catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{Pl}, n}^f$	52
Part II. Les catégories de foncteurs en grassmanniennes	57
5. Les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$	59
5.1. Généralités	59
Premières propriétés	63
Décomposition scalaire et tors de Frobenius	65
Changement de corps	66
5.2. Structures tensorielles	66
5.3. Le foncteur différence	69
Commutation des foncteurs fondamentaux aux foncteurs différences	72
5.4. Foncteurs polynomiaux	73
Quotients de la filtration polynomiale de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$	75
5.5. Foncteurs finis	76
Description des objets simples	78
Quelques conséquences	79
6. La catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$	83
6.1. Généralités	83
Décomposition scalaire, tors de Frobenius et changement de corps	85
Objets finis	85
6.2. Propriété de dualité du foncteur $\tilde{\omega}$	86
6.3. Structure de $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$	88
Structure fondamentale	88
Anneau d'endomorphismes	90
7. La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ comme catégorie de modules	95
7.1. Le foncteur η_I	99
7.2. Résolution canonique et algèbre homologique monadique	100
8. Les catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl}, n}$	107
8.1. Généralités	108
Décomposition scalaire, tors de Frobenius et changement de corps	109
Les objets polynomiaux et finis de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl}, n}$	109

Premiers liens entre les catégories \mathcal{F} , $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ et $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl},n}$ en termes de (co)modules	110
8.2. L'équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl},n} \simeq \mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$	111
Produit cotensoriel et foncteur $\chi_n^{\mathbf{Pl}}$	113
Le foncteur $\chi_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}$	116
9. Foncteurs hom internes et foncteurs de division dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$	121
9.1. Comparaison entre les différentes catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$	121
9.2. Propriétés formelles	124
Foncteurs de division	125
Foncteurs hom internes	126
Le foncteur $\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), \cdot)$	127
Part III. Propriétés cohomologiques du foncteur ω. Applications	129
10. Théorème d'annulation cohomologique	131
10.1. Préliminaires	131
Résultats d'annulation cohomologique "abstraites"	133
10.2. Résultats fondamentaux	134
11. Foncteur ω et foncteurs hom internes	137
11.1. Scindement de $\Delta_V \circ \omega$	137
11.2. Le morphisme $h_{X,F}^* : \omega(\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{G}}^*(F, \omega(X))$	138
Description explicite du morphisme $h_{X,F}^*$	139
Retour sur la méthode de [Dja07a]	141
12. La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F}	143
12.1. Foncteurs induits	143
12.2. La conjecture artinienne extrêmement forte	145
12.3. Conséquences de la conjecture artinienne extrêmement forte	147
13. Résultats d'annulation cohomologique dans \mathcal{F}_{inj}	149
13.1. Une propriété élémentaire	150
13.2. Propriétés utilisant le foncteur ω	151
Application à la K -théorie stable	152
13.3. La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F}_{inj}	153

Part IV. Foncteur ω et ∇-nilpotence	155
14. Introduction : la catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$	157
14.1. Le théorème principal	157
14.2. Remarques et conjecture	162
15. Préliminaires relatifs aux foncteurs ω et $\tilde{\nabla}_n$	167
15.1. Les foncteurs $\nabla_n^{\mathcal{G}_r}$	167
15.2. Estimation de $\tilde{\nabla}_n \omega_n$	170
15.3. Théorème d'annulation cohomologique relatif à la ∇ -nilpotence	173
16. Théorèmes fondamentaux	177
16.1. Le morphisme $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$	178
16.2. Théorème de simplicité généralisé	184
16.3. Foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ -adaptés	190
16.4. Structure de $P^{\otimes 2} \otimes F$ pour un foncteur fini F	193
A. Adjonctions	195
A.1. Algèbre homologique	195
A.2. Monades et comonades	196
B. Propriétés de finitude dans les catégories abéliennes	199
B.1. Définitions	199
Catégories abéliennes quotients	201
B.2. Effet de foncteurs exacts	202
B.3. Groupes de Grothendieck	203
B.4. Filtration de Krull	204
C. Catégories de foncteurs	205
C.1. Généralités	205
C.2. Générateurs projectifs	206
C.3. Foncteurs hom internes et foncteurs de division	208
C.4. Décomposition scalaire	209
C.5. Produit tensoriel extérieur	209
C.6. Recollements	210
Index	213
Index des notations	217
Catégories	217
Constructions générales	218
Constructions à partir d'une catégorie abélienne \mathcal{A}	218
Foncteurs	218
Objets des catégories de foncteurs	218
Foncteurs entre catégories de foncteurs	219