

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 186

Nouvelle série

***S*-INTEGRAL QUADRATIC FORMS
AND HOMOGENEOUS DYNAMICS**

I. CALDERÓN

2 0 2 5

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Boris ADAMCZEWSKI
François CHARLES
Gabriel DOSPINESCU
Béatrice de TILLIÈRE
Clotilde FERMANIAN

Dorothee FREY
Youness LAMZOURI
Wendy LOWEN
Ludovic RIFFORD

François DAHMANI (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 46 € (\$ 69)

Abonnement électronique : 128 € (\$ 192)

Abonnement avec supplément papier : 220 €, hors Europe : 265 € (\$ 397)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`memoires@smf.emath.fr` • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2025

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-37905-210-1

doi:10.24033/msmf.493

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

***S*-INTEGRAL QUADRATIC FORMS
AND HOMOGENEOUS DYNAMICS**

Irving Calderón

I. Calderón

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N, Alcaldía Coyoacán, CP 04510,
Ciudad Universitaria, CDMX, México.

E-mail : `irv.calderon@ciencias.unam.mx`

Soumis le 21 février 2022, révisé le 15 mars 2023, accepté le 25 avril 2023.

2000 Mathematics Subject Classification. – 11E12, 37A17, 37A25, 11E08, 11H55.

Key words and phrases. – Integral quadratic forms, homogeneous dynamics, mixing rates, S-arithmetic groups.

Mots clefs. – Formes quadratiques entières, dynamique homogène, vitesse de mélange, groupes S-arithmétiques.

S -INTEGRAL QUADRATIC FORMS AND HOMOGENEOUS DYNAMICS

Irving Calderón

Abstract. – Let $S = \{\infty\} \cup S_f$ be a finite set of places of $\mathbb{Q}$. Using homogeneous dynamics, we establish two new quantitative and explicit results about integral quadratic forms in three or more variables: The first is a criterion of S -integral equivalence. The second determines a finite generating set of any S -integral orthogonal group. Both theorems—which extend results of H. Li and G. Margulis for $S = \{\infty\}$ —are given by polynomial bounds on the size of the coefficients of the quadratic forms.

Résumé (Formes quadratiques S -entières et dynamique homogène)

Soit $S = \{\infty\} \cup S_f$ une partie finie de places de $\mathbb{Q}$. En utilisant la dynamique homogène, on établit deux nouveaux résultats quantitatifs et explicites pour des formes quadratiques entières en au moins trois variables : Le premier est un critère d'équivalence S -entière. Le deuxième détermine une partie génératrice finie de tout groupe orthogonal S -entier. Ces deux théorèmes – qui étendent des résultats de H. Li et G. Margulis pour $S = \{\infty\}$ – sont données par des bornes polynomiales en la taille des coefficients des formes quadratiques.

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. A criterion of $\mathbb{Z}_S$ -equivalence for integral quadratic forms	1
1.2. Small generators of S -integral orthogonal groups	3
1.3. Extension of the main results to any number field	4
1.4. Organization of the article	6
1.5. Acknowledgments	6
2. Quadratic forms over $\mathbb{Q}_\nu$	7
2.1. Basic definitions	7
2.2. Standard quadratic forms over $\mathbb{Q}_\nu$	9
2.3. Three lemmas	10
3. The dynamics of $\mathbb{Z}_S$-equivalence	17
3.1. Basic dynamical lemmas	19
3.2. Background on unitary representations	21
3.3. Automorphic representations of $\mathbb{Q}$ -groups	23
3.4. Uniform spectral gap for automorphic representations	25
3.5. Uniform mixing speed for closed H_S° -orbits	26
3.6. Injectivity radius on $X_{d,S}$	29
3.7. Bump functions	30
3.8. The main proofs	31
4. Volume of closed H_S-orbits	35
4.1. Main statement and strategy of proof	35
4.2. Transversal isolation of closed H_S -orbits	36
4.3. Uniform recurrence of closed H_S -orbits	40
4.4. Transversal recurrence of closed H_S -orbits	46
4.5. The main proof	51
5. Effective criteria of $\mathbb{Z}_S$-equivalence	53
6. Small generators of S-integral orthogonal groups	59
6.1. Two basic lemmas	60
6.2. A fundamental set of Γ_S^Q in H_S^Q	61
6.3. Choosing $\mathcal{T}_S^Q$	64
6.4. Main proofs	66