DYNAMIQUE DES DIFFÉOMORPHISMES CONSERVATIFS DES SURFACES : UN POINT DE VUE TOPOLOGIQUE

Sylvain Crovisier, John Franks,
Jean-Marc Gambaudo, Patrice Le Calvez

Panoramas et Synthèses

Numéro 21 2006

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique et du Ministère de la culture et de la communication (aide de la délégation générale à la langue française)

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 21

DYNAMIQUE DES DIFFÉOMORPHISMES CONSERVATIFS DES SURFACES : UN POINT DE VUE TOPOLOGIQUE

Sylvain Crovisier

John Franks

Jean-Marc Gambaudo

Patrice Le Calvez

Société Mathématique de France 2006

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

S. Crovisier

CNRS - Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France.

E-mail : crovisie@math.univ-paris13.fr

J. Franks

Department of Mathematics, Northwestern University, Evanston, IL 60208-2730, USA.

E-mail : j-franks@math.northwestern.edu

J.-M. Gambaudo

Centro de Modelamiento Matemático, U.M.I. CNRS 2807, Universidad de Chile, Av. Blanco Encalada 2120, Santiago, Chile.

E-mail : gambaudo@dim.uchile.cl

Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR 5584, Université de Bourgogne, 21078, Dijon, France.

E-mail : gambaudo@u-bourgogne.fr

P. Le Calvez

CNRS - Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France.

E-mail : lecalvez@math.univ-paris13.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 37-01, 37A05, 37C25, 37E30, 37E45.

***Mots clefs*. —** Systèmes dynamiques conservatifs, difféomorphismes, orbites périodiques, difféomorphismes de surfaces.

DYNAMIQUE DES DIFFÉOMORPHISMES CONSERVATIFS DES SURFACES : UN POINT DE VUE TOPOLOGIQUE

Sylvain Crovisier, John Franks, Jean-Marc Gambaudo, Patrice Le Calvez

***Résumé.* —** Nous nous intéressons dans ce volume à la dynamique des difféomorphismes des surfaces préservant une forme d'aire. La dimension deux offre des outils mathématiques qui lui sont propres. Le but de ces textes est donc de présenter à travers des approches différentes, diverses méthodes d'étude et d'en donner des applications. En particulier, nous cherchons à montrer comment se rencontrent les points de vue de la théorie géométrique des systèmes dynamiques, de la théorie des groupes, de l'hydrodynamique et de la topologie plane.

***Abstract* (Dynamics of conservative surfaces diffeomorphisms: a topological viewpoint)**

This volume deals with the dynamics of area-preserving surface diffeomorphisms. In dimension 2 some specific mathematical tools are available. Along these texts, we present several approaches and some applications. In particular, we try to show how the geometrical theory of dynamical systems, the group theory, the hydrodynamics and the plane topology interfere.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Nous donnons un panorama des principales propriétés dynamiques satisfaites par les difféomorphismes C^1-génériques sur les surfaces. Nous énonçons un lemme de connexion pour les pseudo-orbites. Puis, nous expliquons les techniques de perturbations pour la topologie C^1.

Si G est un groupe finiment engendré par des générateurs $\{g_1, \dots, g_j\}$, un élément d'ordre infini $f \in G$ est un *élément de distorsion* de G lorsque $\liminf_{n\to\infty} |f^n|/n = 0$, où $|f^n|$ est la longueur de f^n comme mot en les générateurs. Nous présentons un panorama de nombreux résultats autour de cette notion et donnons des applications aux actions de groupes sur les surfaces, notamment dans le cas où une mesure de Lebesgue est préservée. Soit S une surface fermée orientable et soit $\mathrm{Diff}(S)_0$ la composante de l'identité dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 de S. Un des résultats présentés affirme que si le genre de S est au moins égal à 2, et si f est un élément de distorsion dans un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(S)_0$ finiement engendré, alors $\mathrm{supp}(\mu) \subset \mathrm{Fix}(f)$ pour toute mesure de probabilité borélienne μ qui est invariante par f. Nous comparons également certains résultats obtenus pour les difféomorphismes de surfaces avec des résultats analogues pour les difféomorphismes du cercle.

Cet article s'organise autour de trois directions fortement corrélées. La première donne une description de divers invariants topologiques associés à un flot

ABSTRACTS

We give a survey on the main dynamical properties satisfied by C^1-generic surface diffeomorphisms. We state a connecting lemma for pseudo-orbits obtained in collaboration with M.-C. Arnaud and C. Bonatti. We then explain the perturbation techniques in C^1 topology.

If G is a finitely generated group with generators $\{g_1, \dots, g_j\}$ then an infinite order element $f \in G$ is a *distortion element* of G provided $\liminf_{n\to\infty} |f^n|/n = 0$, where $|f^n|$ is the word length of f^n in the generators. We survey a number of results concerning this concept and its application to group actions on surfaces, especially those which preserve a Borel measure. Let S be a closed orientable surface and let $\mathrm{Diff}(S)_0$ denote the identity component of the group of C^1 diffeomorphisms of S. One of the results we discuss asserts that if S has genus at least two and if f is a distortion element in some finitely generated subgroup of $\mathrm{Diff}(S)_0$, then $\mathrm{supp}(\mu) \subset \mathrm{Fix}(f)$ for every f-invariant Borel probability measure μ. We also compare results for surface diffeomorphisms with analogous results for the circle.

This paper is organized along three directions which are strongly interconnected. The first one is a review of topological invariants associated with flows in 3 dimensional manifolds. These invariants are related to averaged asymptotic linking properties of orbits. The second one is the study of the space of configurations of an incompressible fluid on an oriented manifold. This space can be parametrized by the group of diffeomorphisms isotopic to the identity which preserve a given volume form. This group can be equipped with a natural right invariant metric that we analyse both from the global point of view (diameter of the group) and the geodesic one. Extensions to the case of groups of diffeomorphisms preserving a given symplectic form are also reviewed. A particular attention is paid to the case when the dimension is 2 where both points of view coincide. In the third part, we study the structure of the group of diffeomorphisms on a compact oriented surface which are isotopic to the identity and preserve a given area form. According to the genus of the surface, we describe the subgroup generated by the commutators and show that on this subgroup the commutator length is unbounded, a result obtained in collaboration with Étienne Ghys.

We will state an equivariant foliated version of the classical Brouwer Plane Translation Theorem and will explain how to apply this result to the study of homeomorphisms of surfaces. In particular we will explain why a diffeomorphism of a closed oriented surface of genus ≥ 1 that is the time-one map of a time dependent Hamiltonian vector field has infinitely many contractible periodic orbits. This gives a positive answer in the case of surfaces to a more general question stated by C. Conley. We will state other results about linking numbers of fixed points or periodic orbits of homeomorphisms of surfaces. We will conclude this article by introducing the free brick decompositions and explaining how to use these decompositions to get the equivariant foliated version of the Brouwer Plane Translation Theorem.

INTRODUCTION

Les textes présentés reprennent les notes des cours donnés lors de la session « États de la Recherche » de la Société Mathématique de France qui s'est tenue à Dijon du 1er au 3 juillet 2004. Les exposés ne s'adressaient pas seulement aux spécialistes du sujet mais aussi à des étudiants de troisième cycle et à de jeunes chercheurs dans des domaines voisins. Nous nous proposons dans les pages qui suivent, en précisant le sens du titre de cette session, de situer ces textes dans un cadre unifié.

Des systèmes dynamiques aux systèmes dynamiques conservatifs

On fait souvent remonter l'origine des systèmes dynamiques à H. Poincaré et à son étude de la stabilité du système solaire [**Po2, Po3**]. Le point de vue nouveau introduit par Poincaré consiste à remplacer la recherche souvent vaine de solutions explicites des équations différentielles par l'étude qualitative de ces solutions. Rappelons que la donnée d'un champ de vecteurs X de classe C^r, $r \geq 1$, sur une variété M définit en coordonnées locales un système d'équations différentielles autonome et, lorsque M est compacte ou plus généralement lorsque X est complet, un flot global $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$, c'est-à-dire un morphisme $t \mapsto \phi_t$ du groupe additif réel dans le groupe $\mathrm{Diff}^r(M)$ des difféomorphismes de classe C^r de M, défini par :

$$\phi_0 = \mathrm{Id}_M \ \text{ et } \frac{d}{dt}\,\phi_t(z) = X(\phi_t(z)).$$

L'étude qualitative du système consiste à rechercher des propriétés (généralement asymptotiques) des orbites $t \mapsto \phi_t(z)$ de ce flot. De même, la donnée d'un champ de vecteurs $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dépendant du temps définit en coordonnées locales un système d'équations différentielles non autonome et, lorsqu'il est complet, une famille $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de difféomorphismes de M par $\phi_0 = \mathrm{Id}_M$ et $\frac{d}{dt}\,\phi_t(z) = X_t(\phi_t(z))$. Dans le cas où le système non autonome est périodique de période T (*i.e.* lorsque $X_t(z) = X_{t+T}(z)$ pour tout t), on a $\phi_{t+T} = \phi_t \circ \phi_T$. Il nous suffit alors de considérer les orbites $(F^k(z))_{k\in\mathbb{Z}}$ du difféomorphisme $F = \phi_T$ pour comprendre notre système initial. Dans le cas autonome, il peut être aussi avantageux de se ramener à l'étude des itérés d'un difféomorphisme. C'est le cas par exemple, lorsque le champ de vecteurs est transverse à une sous-variété N de codimension un et lorsque toute orbite rencontre une infinité de fois N. On dit alors que N est une *section de Poincaré* et le difféomorphisme est alors l'*application de premier retour* sur N. Si cette dernière situation est exceptionnelle, l'existence de sections de Poincaré locales, est bien plus fréquente. Ainsi, pour chaque orbite périodique (qui n'est pas une singularité du champ de vecteurs associé) du flot (ϕ_t), on peut construire N contenant un point donné z_0 de l'orbite périodique et une application de premier retour définie localement sur N au voisinage du point fixe z_0. On peut ici noter le rôle important (déjà remarqué par Poincaré) joué par les orbites périodiques.

Le difféomorphisme $F = \phi_T$ défini plus haut pour les systèmes périodiques en temps est bien évidemment isotope à l'identité : il existe une famille continue $(F_t)_{t\in[0,1]}$ de difféomorphismes qui joint l'identité à F. Ce n'est pas le cas de tout difféomorphisme $F \in \mathrm{Diff}^r(N)$ défini comme application de premier retour sur une section de Poincaré d'un champ de vecteurs. En fait, un difféomorphisme arbitraire F d'une variété N peut toujours être vu comme application de premier retour : le champ de vecteurs vertical $(z,t) \mapsto (0,1)$ défini sur la variété $M = N \times \mathbb{R}$ passe au quotient et définit un champ de vecteurs X sur la variété $M = (N \times \mathbb{R})/(z,t) \sim (F(z), t+1)$. Ce champ admet $N \times \{0\}$ comme section de Poincaré et l'application de premier retour s'écrit $(z,0) \mapsto (F(z),0)$. Dans cette introduction, ainsi que dans les textes qui suivent, on s'intéressera particulièrement au sous-groupe $\mathrm{Diff}^r_*(M)$ des difféomorphismes de classe C^r de M isotopes à l'identité.

Les sections de Poincaré (locales ou globales) apparaissent également dans le cadre plus général de la théorie des feuilletages (voir par exemple [**Go**]). Au voisinage d'un point z_0 d'une feuille compacte L d'un feuilletage de classe C^r, on peut considérer une section transverse locale N contenant z_0. On obtient alors par holonomie un morphisme naturel du groupe fondamental $\pi_1(L, z_0)$ vers le groupe des germes de difféomorphismes de N en z_0. Comme autre exemple, on peut considérer le cas d'une variété compacte E fibrée au-dessus d'une variété B. Pour tout feuilletage de E transverse à la fibration, on obtient naturellement, si $z_0 \in B$ est fixé, un morphisme du groupe fondamental $\pi_1(B, z_0)$ vers le groupe des difféomorphismes de la fibre de z_0. De façon plus générale, il y a de nombreuses motivations pour chercher à comprendre les actions d'un groupe sur une variété, provenant de différentes branches des mathématiques. Ainsi, on peut considérer le groupe des symétries d'une variété munie d'une structure géométrique. Un autre exemple important consiste à étudier l'action (à gauche) d'un sous-groupe H d'un groupe de Lie G sur l'espace homogène G/Γ où Γ est un sous-groupe fermé de G. Cet exemple comprend l'étude du flot géodésique sur une surface compacte à courbure négative constante ; il est également lié à des questions de théorie des nombres. Ces exemples motivent l'étude des morphismes d'un groupe plus général que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ vers le groupe des difféomorphismes d'une variété et ce type d'actions sera souvent abordé à plusieurs reprises dans ce manuscrit. Enfin, les groupes de difféomorphismes eux-mêmes (et plus seulement les images par des morphismes de groupes plus simples) sont intéressants à plus d'un titre. D'une part du point de vue de la théorie des groupes, on peut se poser la question de leur structure (sont-ils simples ?), d'autre part du point de vue hydrodynamique, le groupe $\mathrm{Diff}^\infty_*(M)$ tout entier peut être interprété comme une paramétrisation idéale de l'espace des configurations d'un fluide sur M.

Les systèmes décrits par Poincaré en mécanique céleste, comme beaucoup de systèmes provenant de la physique, appartiennent à la classe plus générale des *systèmes hamiltoniens* : la variété M, qui est paramétrée par les variables *action-angle*, est de dimension paire et est munie d'une forme symplectique ω, c'est-à-dire d'une forme différentielle fermée d'ordre deux non dégénérée et le champ de vecteurs est le gradient symplectique (*i.e.* défini par dualité à partir de ω) d'une fonction $H\colon M \to \mathbb{R}$ de classe C^{r+1}. On sait alors que le morphisme $t \mapsto \phi_t$ prend ses valeurs dans $\mathrm{Diff}^r(M,\omega)$, le groupe des *difféomorphismes symplectiques*, c'est-à-dire qui préservent ω. Bien évidemment, les difféomorphismes (globaux ou locaux) qui apparaissent comme application de premier retour sur une section de Poincaré N ne peuvent être symplectiques (N est de dimension impaire et ne peut être muni d'aucune structure symplectique). Cependant une nouvelle réduction est possible : on sait que chaque hypersurface de niveau de H est invariante par le flot et on peut donc chercher des sections de Poincaré du flot restreint à cette hypersurface. Une telle section possède alors une structure symplectique, naturellement définie à partir de ω, qui est préservée par l'application de premier retour.

Bien entendu, le fait qu'un difféomorphisme préserve une structure peut être riche en conséquence pour ses propriétés dynamiques. Par exemple, on peut remarquer que tout difféomorphisme $F \in \mathrm{Diff}^r(M,\omega)$ d'une variété symplectique M préserve la forme volume $\omega^d = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (d fois), où $2d$ est la dimension de M, et en déduire, dans le cas où M est compacte, que toute partie ouverte non vide U rencontre un nombre infini de ses itérés. En effet, pour tout $n \geq 1$, les parties $F^{kn}(U)$, $k \geq 0$, ont toutes même volume (non nul). Puisque M est de volume fini, il existe $k' > k \geq 0$ tels que $F^{k'n}(U) \cap F^{kn}(U) \neq \varnothing$ et donc $F^{(k'-k)n}(U)$ rencontre U. En affinant ce raisonnement on obtient le théorème de récurrence de Poincaré :

Théorème de récurrence de Poincaré. — *Presque tout point z (au sens de la mesure) est valeur d'adhérence des deux suites $(F^n(z))_{n\geq 0}$ et $(F^n(z))_{n\leq 0}$.*

Cette propriété, qui indique que presque tout point est *récurrent*, est un exemple simple de propriété qualitative d'un système dynamique. Elle s'applique aux systèmes *conservatifs*, *i.e.* à tout élément du groupe $\mathrm{Diff}^r(M,\mathrm{vol})$ des difféomorphismes qui préservent une forme volume vol sur M, telle que $\mathrm{vol}(M) < +\infty$, ou plus généralement à tout difféomorphisme qui préserve une mesure finie chargeant tout ouvert non vide. C'est plus particulièrement à ce type de difféomorphismes que nous nous intéresserons dans ces notes.

L'idée de s'abstraire des propriétés différentiables ou même topologiques, c'est-à-dire l'idée d'étudier pour presque tout point z les orbites $(F^n(z))$ d'une application $F\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ préservant une mesure μ sur un espace probabilisé est le point de vue de la *théorie ergodique*. On peut énoncer l'important théorème ergodique de Birkhoff :

Théorème ergodique de Birkhoff. — *Si $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ est une fonction μ-intégrable, alors pour μ-presque tout point $z \in X$, les moyennes temporelles $\frac{1}{n}\big(\phi(z) + \phi(F(z)) + \cdots + \phi(F^{n-1}(z))\big)$ convergent vers un réel $\phi^*(z)$. La fonction mesurable ϕ^* ainsi définie est intégrable et on a $\int \phi\, d\mu = \int \phi^*\, d\mu$.*

Il n'est pas difficile de voir que l'ensemble des points récurrents d'un difféomorphisme est un G_δ de M (*i.e.* une intersection dénombrable de parties ouvertes). Le théorème de récurrence de Poincaré montre que, pour les difféomorphismes conservatifs, cet ensemble est « gros » au sens de la mesure (en particulier, il est dense). Il est donc *résiduel*, c'est-à-dire qu'il contient un G_δ dense. Rappelons que la notion d'ensemble résiduel, dans un espace de Baire, est l'analogue de celle d'ensemble de mesure totale dans un espace probabilisé : une intersection dénombrable de parties résiduelles est encore résiduelle. Une propriété vérifiée sur un ensemble résiduel est dite *générique*. Cette notion de généricité (nous en verrons des exemples dans cette introduction) apparaît également dans l'espace $\mathrm{Diff}^r(M)$, muni de la topologie C^r (*i.e.* de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts des différentielles jusqu'à l'ordre r). Cet ensemble est en effet un espace de Baire.

Diverses approches des systèmes dynamiques

Les façons d'aborder les systèmes dynamiques sont nombreuses (voir [**1, 2, 3, 4**]). Nous allons en décrire quelques aspects que nous retrouverons à diverses reprises dans les textes qui suivent.

La recherche d'invariants de conjugaison. — Une notion naturelle en systèmes dynamiques est celle de *conjugaison* : deux difféomorphismes F et G sont (topologiquement) conjugués s'il existe un homéomorphisme H tel que $F \circ H = H \circ G$. Cela signifie que les deux difféomorphismes sont identiques à un changement de variable près. Les orbites de F sont alors les images par H des orbites de G et les propriétés dynamiques purement topologiques satisfaites par l'un des difféomorphismes sont aussi vérifiées par l'autre. Ainsi, si F possède une orbite dense, G en possède une également. D'autres propriétés plus fines se transportent également, si la conjuguante H est suffisamment différentiable : par exemple, la vitesse de convergence d'une orbite vers un point fixe. La recherche d'invariants de conjugaison est donc importante en systèmes dynamiques. Nous allons en donner deux illustrations classiques.

Le nombre de rotation. — Poincaré, dans son étude [**Po1**] des systèmes différentiels sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ a introduit la notion de *nombre de rotation* pour les difféomorphismes (et même homéomorphismes) du cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Les systèmes d'équations différentielles étudiés par Poincaré admettent une section globale, qui est difféomorphe à un cercle, et l'application de premier retour définit, à conjugaison près, un difféomorphisme de $\mathbb{T}^1$ qui préserve l'orientation. Si F est un homéomorphisme de $\mathbb{T}^1$ préservant l'orientation (il n'est pas difficile de voir qu'un homéomorphisme préserve l'orientation si et seulement s'il est isotope à l'identité) et $\widetilde{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relèvement de F au revêtement universel, il existe un réel $\rho(\widetilde{F})$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{k\to\pm\infty} \frac{\widetilde{F}^k(x)-x}{k} = \rho(\widetilde{F})$. Ce nombre réel représente la vitesse asymptotique de l'orbite de x. Le choix d'un autre relèvement change le nombre de rotation par addition d'un entier ; ainsi $\rho(F) = \rho(\widetilde{F}) + \mathbb{Z} \in \mathbb{T}^1$ ne dépend que de F. L'élément $\rho(F)$ est alors un invariant de conjugaison dans $\mathrm{Diff}^0_*(\mathbb{T}^1)$. On sait également que $\rho(F) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ si et seulement si F possède au moins un point *périodique* (c'est-à-dire un point z