Revue d'histoire des mathématiques
11 (2005), p. 205–238

LA MÉTHODE DE CHOLESKY

Claude Brezinski

Résumé. — L'objet de cet article est de présenter le manuscrit original, jusqu'alors inconnu, de Cholesky où il explique sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires. Le contexte historique est précisé après une brève biographie. La méthode des moindres carrés et son application à la topographie, ainsi que les diverses méthodes directes de résolution des systèmes linéaires sont discutées. Ensuite, la diffusion de la méthode de Cholesky est retracée et l'on donne une analyse détaillée du manuscrit de Cholesky (qui est entièrement reproduit). Les autres travaux du fonds A. Cholesky de l'École polytechnique sont énumérés.

Abstract (The Method of Cholesky). — The purpose of this paper is to present the original manuscript, unknown until now, of Cholesky where he explains his method for solving systems of linear equations. After a brief biography, the historical context is specified. The method of least squares and its application to topography, and the various methods for the solution of linear systems are discussed. Then, the spreading of Cholesky's method is reported, and a detailed analysis of Cholesky's manuscript (entirely reproduced) is given. The other works in the fonds A. Cholesky of the École polytechnique are enumerated.

Texte reçu le 4 novembre 2004, révisé le 11 mai 2005.

C. Brezinski, Laboratoire Paul Painlevé, UMR CNRS 8524, UFR de Mathématiques pures et appliquées, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).
Courrier électronique : `claude.brezinski@univ-lille1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01-08, 01-99, 01A55, 01A60, 01A70, 65F05.

Mots clefs : Méthode de Cholesky, systèmes linéaires, moindres carrés, topographie.

Key words and phrases. — Cholesky method, linear systems, least squares, topography.

Le nom de Cholesky est passé à la postérité grâce à sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires. Elle est toujours intensément utilisée de nos jours.

Jusqu'à ces derniers temps, cette méthode n'était connue que de seconde main puisque Cholesky n'en a rien publié lui-même. Sa famille vient de déposer aux archives de l'École polytechnique, où Cholesky fut élève, les papiers en sa possession. Ils forment le fonds A. Cholesky. Parmi ces pièces se trouve un manuscrit de Cholesky où il expose sa méthode. C'est donc un document scientifique de première importance. Nous allons le replacer ici dans son contexte historique et l'analyser. Nous donnerons aussi une brève biographie de son auteur et des indications sur ses autres travaux[1].

1. ANDRÉ CHOLESKY

André-Louis Cholesky naquit le 15 octobre 1875 à Montguyon, petite commune de l'arrondissement de Jonzac (Charente-Maritime). Il était le fils d'André Cholesky, maître d'hôtel, et de Marie Garnier. André avait de nombreux frères et sœurs.

Il obtint la première partie de son baccalauréat à Bordeaux en 1892 et sa seconde partie, avec la mention assez bien, l'année suivante. Le 15 octobre 1895, il entre à l'École polytechnique, 87^{e} sur 223. Deux ans plus tard, il est admis à l'École d'application de l'artillerie et du génie de Fontainebleau. Il en sort en 1899, 5^{e} sur 86.

Nommé lieutenant en 1899, Cholesky effectue diverses missions en Tunisie et en Algérie entre 1902 et 1904. En juin 1905, il est affecté au service géographique de l'état-major de l'armée. À cette époque, suite à la révision de la méridienne de Paris, une nouvelle triangulation cadastrale de la France venait d'être décidée, ainsi que la mesure de la méridienne de Lyon. Cholesky prendra part à ces campagnes de mesure dans la vallée du Rhône, le Dauphiné, l'Isère et les Cévennes.

Le 10 mai 1907, il épouse sa cousine germaine Anne-Henriette Brunet. Ils auront deux fils, dont un posthume, et deux filles : René (né en 1908), Françoise (née en 1909), Hélène (née en 1911) et André (né en 1919), tous décédés.

[1] Pour de plus amples détails, voir [Brezinski 2005] et [Brezinski & Gross-Cholesky 2005].

De novembre 1907 à juin 1908, Cholesky effectue une mission en Crète, alors occupée par les troupes internationales. Nommé capitaine en 1909, il est maintenu au service géographique. En août 1909, il est rayé des contrôles du service géographique et doit rejoindre le 13^e régiment d'artillerie afin d'y effectuer le temps légal de deux ans qu'il devait accomplir comme commandant de batterie. C'est à cette époque qu'il rédige le manuscrit, conservé dans le fonds A. Cholesky, sur sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires, la fameuse *méthode de Cholesky*. En septembre 1911, il est affecté à l'état-major de l'artillerie, puis de nouveau au service géographique de l'armée.

En mai 1913, Cholesky est nommé chef du service topographique de la régence de Tunis. La direction du nivellement en Algérie et en Tunisie lui est confiée. Il y reste jusqu'au 2 août 1914, date de la mobilisation. Il rejoint le 16^e régiment d'artillerie basé à Issoire.

À partir de décembre 1909 (et peut-être avant) jusqu'à, au moins, janvier 1914, Cholesky participe à l'enseignement par correspondance de l'École spéciale des travaux publics, du bâtiment et de l'industrie, fondée par Léon Eyrolles. Pour les étudiants, il rédigera de nombreux documents sur la topographie et les instruments de mesure, ainsi qu'un traité de topographie [Cholesky 1937].

En septembre 1914, Cholesky est nommé commandant de la 9^e batterie. Le 3 janvier 1915, il est détaché auprès du général commandant l'artillerie du 17^e corps d'armée pour l'organisation du tir. En février, il est affecté au service géographique de l'armée pour être employé à un groupe de canevas de tir du détachement de l'armée des Vosges. Il devient chef du groupe des canevas de tir de la VII^e armée en juillet 1916.

De septembre 1916 à février 1918, Cholesky est affecté à la mission militaire en Roumanie. Il y exerce les fonctions de directeur technique du service géographique et est promu chef d'escadron.

Le 5 juin 1918, il est affecté au 202^e régiment d'artillerie de campagne. Entre le 15 août et le 26 septembre, ce régiment participera à l'offensive sur la ligne Hindenburg. En particulier, il sera engagé dans les combats sur l'Ailette du 23 août et dans ceux de Courson.

Le 31 août 1918, Cholesky décède à 5 heures du matin dans une carrière au nord de Bagneux (dans l'Aisne, à environ 10 km au nord de Soissons) des suites de blessures reçues sur le champ de bataille. Il fut inhumé au cimetière militaire de Chevillecourt près d'Autrèches dans l'Oise, puis son corps fut transféré au cimetière de Cuts (dans l'Oise, à 10 km au sud-est de Noyon), tombe 348, carré A.

FIGURE 1. A.-L. Cholesky, élève à l'École polytechnique (Reproduit avec la gracieuse autorisation des Archives de l'École polytechnique)

2. LE CONTEXTE HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE CHOLESKY

La méthode de Cholesky est bien connue en analyse numérique. Soit à résoudre le système d'équations linéaires $Ax = b$, où la matrice A est carrée, symétrique et définie positive. Cette méthode consiste à décomposer la matrice A en un produit $A = LL^T$, où L est une matrice triangulaire inférieure (c'est-à-dire dont tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls) avec des termes diagonaux strictement positifs. Le système devient alors $LL^T x = b$. On pose $L^T x = y$. On résout donc d'abord $Ly = b$, ce qui fournit le vecteur y. Puis on résout $L^T x = y$. Les éléments de la matrice L s'obtiennent en identifiant les éléments correspondants dans les matrices A et LL^T.

Nous allons maintenant replacer la méthode de Cholesky dans le cadre historique des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.

La méthode des moindres carrés

Soit à résoudre le système d'équations linéaires $Mx = c$, où M est une matrice rectangulaire ayant m lignes et n colonnes. Si $m > n$, ce système n'a pas de solution x qui vérifie exactement les équations. On cherche alors à les résoudre *au mieux*, c'est-à-dire à minimiser la norme euclidienne du résidu $r = c - Mx$. En écrivant que les dérivées partielles de $\|r\|_2^2$ par rapport aux x_i doivent être nulles, on obtient les *équations normales* $M^T Mx = M^T c$. La matrice $A = M^T M$ est symétrique et, si les colonnes de M sont linéairement indépendantes, définie positive. On dit que le vecteur x, solution unique des équations normales $Ax = b$, avec $b = M^T c$, est solution du système $Mx = c$ *au sens des moindres carrés*. Cette méthode est liée à la réduction des formes quadratiques, sujet d'un article de Joseph-Louis Lagrange [1759]. À cette occasion, Lagrange donne des formules d'élimination semblables à celles de la méthode de Gauss dont nous parlerons plus loin. Il semble que l'interprétation matricielle de cette méthode de réduction soit due à Carl Gustav Jacob Jacobi [1857] dans un article posthume.

La méthode des moindres carrés fut publiée pour la première fois par Adrien-Marie Legendre [1806, Appendice]. Sa justification comme procédure statistique fut donnée par Carl Friedrich Gauss en 1809 [Gauss 1809], puis en 1810 dans son mémoire sur l'astéroïde Pallas découvert par Heinrich Wilhelm Olbers le 28 mars 1802 [Gauss 1810]. Selon Gauss, la méthode des moindres carrés conduit à la meilleure combinaison possible des observations quelle que soit la loi de probabilité des erreurs [Gauss 1823]. Elle fut immédiatement reconnue comme une contribution majeure. Gauss affirma l'avoir déjà utilisée dès 1795. Il est certain qu'il s'en servit en 1801 pour déterminer l'orbite de la comète Cérès découverte par Giuseppe Piazzi le 1er janvier 1801 (*cf.* [Björck 1996], [Goldstine 1977]). Résoudre les équations normales $Ax = b$ revient à rechercher le vecteur x tel que

$$\|b - Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[b_i - (Ax)_i\right]^2 = 0.$$