

Revue d'Histoire des Mathématiques



*La géométrie dans la géométrie des nombres :
histoire de discipline ou histoire de pratiques
à partir des exemples de
Minkowski, Mordell et Davenport*

Sébastien Gauthier

Tome 15 Fascicule 2

2 0 0 9

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :
Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :
Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Tom Archibald
Alain Bernard
Frédéric Brechenmacher
Marie-José Durand-Richard
Étienne Ghys
Hélène Gispert
Jens Høyrup
Agathe Keller
Laurent Mazliak
Karen Parshall
Jeanne Peiffer
Sophie Roux
Joël Sakarovitch
Dominique Tournès

Directeur de la publication :
Stéphane Jaffard

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall
June Barrow-Greene
Liliane Beaulieu
Umberto Bottazzini
Jean-Pierre Bourguignon
Aldo Brigaglia
Bernard Bru
Jean-Luc Chabert
François Charette
Karine Chemla
Pierre Crépel
François De Gandt
Moritz Epple
Natalia Ermolaëva
Christian Gilain
Catherine Goldstein
Jeremy Gray
Tinne Hoff Kjeldsen
Jesper Lützen
Antoni Malet
Irène Passeron
Christine Proust
David Rowe
Ken Saito
S. R. Sarma
Erhard Scholz
Reinhard Siegmund-Schultze
Stephen Stigler
Bernard Vitrac

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2009 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 36 €.

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

© SMF N° ISSN : 1262-022X

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

**LA GÉOMÉTRIE DANS LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES :
HISTOIRE DE DISCIPLINE OU HISTOIRE DE PRATIQUES
À PARTIR DES EXEMPLES DE
MINKOWSKI, MORDELL ET DAVENPORT**

SÉBASTIEN GAUTHIER

RÉSUMÉ. — La géométrie des nombres est un domaine des mathématiques le plus souvent caractérisé par l'utilisation de méthodes géométriques pour traiter des problèmes issus de la théorie des nombres. Mais comment identifier une méthode géométrique ? À travers les travaux de Hermann Minkowski, Louis Mordell et Harold Davenport, nous essayons de préciser quelle géométrie est en question dans leurs travaux de géométrie des nombres et comment elle intervient. Nous montrons non seulement que ce qui est considéré comme géométrique change chez ces mathématiciens ; mais aussi que la place accordée à la géométrie n'est pas exactement la même. Ceci nous amènera à interroger la valeur historiographique d'une catégorie comme « géométrique » et son rapport à la pratique mathématique.

ABSTRACT (The geometry in the “geometry of numbers”, history of a discipline or a practice; the examples of Minkowski, Mordell and Davenport)

The Geometry of Numbers is a specialty of mathematics which is often characterized by its use of geometric methods in dealing with number theoretic problems. But how does one identify a geometric method? We try to clarify the kind of geometry which is at stake in the geometry of numbers as it was

Texte reçu le 30 juin 2008, révisé le 14 septembre 2009, accepté le 2 novembre 2009.

S. GAUTHIER, Université Lyon 1, Institut Camille Jordan, UMR 5208, Bâtiment Braconnier, 43 Boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France.

Courrier électronique : gauthier@math.univ-lyon1.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 11–03.

Mots clés : Minkowski, Mordell, Davenport, géométrie des nombres, géométrisation, géométrie, histoire de la théorie des nombres, discipline.

Key words and phrases. — Minkowski, Mordell, Davenport, geometry of numbers, geometrization, geometry, history of number theory, discipline.

Une version préliminaire de ce texte a été exposée en septembre 2005 lors du colloque *Histoire de la géométrie moderne et contemporaine* organisé par Philippe Nabonnand et Klaus Volkert au CIRM à Luminy.

practiced by Hermann Minkowski, by Louis Mordell and Harold Davenport. We find that not only does what is considered as geometric vary between these mathematicians, but also the role played by geometry is not quite the same. This suggests reflections on the historiographical use of such categories as “geometric” and on their relations to mathematical practice.

INTRODUCTION

« La géométrie des nombres est une branche de la théorie des nombres qui a son origine dans la publication du travail fondateur de Minkowski en 1896 et qui s’est finalement constituée comme un champ d’étude important en lui-même. Son objectif est la conversion de questions arithmétiques dans des contextes géométriques, avec comme conséquence que certaines questions difficiles d’arithmétique peuvent être résolues géométriquement par des constructions assez évidentes¹. » [Olds et al. 2000, p. xiii]

Cette description de la géométrie des nombres résume parfaitement les trois éléments communs qui se trouvent dans la plupart des commentaires des mathématiciens : premièrement, la géométrie des nombres serait une branche de la théorie des nombres, ensuite, elle débiterait avec les travaux de Hermann Minkowski (1864–1909) à la fin du XIX^e siècle, enfin elle se caractériserait par l’introduction d’un point de vue géométrique dans l’étude de problèmes de nature arithmétique.

Il est étonnant que cette caractérisation superficielle du type « il s’agit d’utiliser la géométrie en théorie des nombres » apparaisse déjà chez Minkowski (nous le verrons plus loin à la section 2) et soit reprise jusque dans

¹ *The geometry of numbers is a branch of number theory that originated with the publication of Minkowski’s seminal work in 1896 and ultimately established itself as an important field of study in its own right. Its focus is the conversion of arithmetic questions into geometric contexts, with the result that certain difficult questions in arithmetic can be answered geometrically by reasonably obvious constructions.*

des commentaires plus contemporains. Elle apparaît donc comme une définition de la géométrie des nombres qui fonctionne sur cette longue durée et suggère une certaine stabilité du sujet (ou au moins des conceptions à son propos) dans le temps — en particulier une stabilité de la relation entre géométrie et arithmétique. En outre, caractériser la géométrie des nombres par l'intervention de la géométrie en arithmétique est aussi problématique en soi car trop générale : la géométrie diophantienne (ou géométrie arithmétique) qui a pour but l'étude des points à coordonnées rationnelles sur des courbes algébriques (et ses généralisations) peut aussi être décrite comme une intervention de la géométrie en arithmétique. Mais les deux domaines, géométrie des nombres et géométrie diophantienne, relèvent de deux sections distinctes de la théorie des nombres dans la classification actuelle des *Mathematical Reviews* (respectivement les sections 11H et 11G).

L'objectif de cet article est d'essayer de préciser la manière avec laquelle la géométrie intervient dans la géométrie des nombres et de voir que les modes d'intervention variés ont des conséquences sur le rôle qui lui est attribuée dans la recherche en géométrie des nombres. Des différences commencent à apparaître lorsque les descriptions du domaine se font plus précises, mais elles sont surtout mises en évidence si nous quittons les commentaires sur les mathématiques pour nous intéresser à leur pratique. Ce passage à une échelle d'analyse plus fine du travail mathématique montre que ce qui est perçu comme géométrique dans la géométrie des nombres change, malgré une caractérisation superficielle stable du sujet. Ces thèmes seront abordés à travers des exemples pris dans les travaux de Hermann Minkowski, Louis Mordell (1888–1972) et Harold Davenport (1907–1969).

Le choix de Minkowski paraît naturel pour discuter ces problèmes — nous l'avons dit plus haut, il est considéré comme le fondateur de ce nouveau domaine de recherches ; c'est en particulier lui qui introduit pour la première fois l'expression « Geometrie der Zahlen » en 1891 [[Minkowski 1891b](#)]. Justifions davantage le choix de Mordell et Davenport.