

Revue d'Histoire des Mathématiques



*La résolution des équations aux dérivées partielles
dans les Opuscules mathématiques
de D'Alembert (1761-1783)*

Alexandre Guilbaud & Guillaume Jouve

Tome 15 Fascicule 1

2 0 0 9

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :

Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Tom Archibald

Alain Bernard

Frédéric Brechenmacher

Marie-José Durand-Richard

Étienne Ghys

Hélène Gispert

Jens Høyrup

Agathe Keller

Laurent Mazliak

Karen Parshall

Jeanne Peiffer

Sophie Roux

Joël Sakarovich

Dominique Tournès

Directeur de la publication :

Stéphane Jaffard

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall

June Barrow-Greene

Liliane Beaulieu

Umberto Bottazzini

Jean-Pierre Bourguignon

Aldo Brigaglia

Bernard Bru

Jean-Luc Chabert

François Charette

Karine Chemla

Pierre Crépel

François De Gandt

Moritz Epple

Natalia Ermolaëva

Christian Gilain

Catherine Goldstein

Jeremy Gray

Tinne Hoff Kjeldsen

Jesper Lützen

Antoni Malet

Irène Passeron

Christine Proust

David Rowe

Ken Saito

S. R. Sarma

Erhard Scholz

Reinhard Siegmund-Schultze

Stephen Stigler

Bernard Vitrac

Secrétariat :

Nathalie Christiaën

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05

Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96

Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2009 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 36 €.

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

© SMF N° ISSN : 1262-022X

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DANS LES *OPUSCULES MATHÉMATIQUES* DE D'ALEMBERT (1761–1783)

ALEXANDRE GUILBAUD & GUILLAUME JOUVE

RÉSUMÉ. — Au regard de la première partie de son œuvre, D'Alembert est reconnu aujourd'hui comme le fondateur de la théorie des équations aux dérivées partielles. La résolution de ces équations dans le cadre de problèmes physico-mathématiques dans ses neuf tomes d'*Opuscles mathématiques* (1761–1783) reste cependant peu étudiée par les historiens. Nous examinons ici cette question à la lumière de ses recherches sur les cordes vibrantes et l'écoulement des fluides dans ce corpus tardif. Celles-ci nous permettent de caractériser sa démarche ainsi que la notion de solution qui lui est attachée. Ayant des répercussions dans des domaines de recherche adjacents, ces travaux nous invitent également à reconsidérer sa position et l'évolution de sa pensée dans la polémique sur les fonctions arbitraires. Nous livrons enfin, avec cet article, un inventaire des équations aux dérivées partielles dans l'ensemble de son œuvre.

ABSTRACT (The resolution of partial differential equations in the *Opuscles mathématiques* of D'Alembert (1761–1783))

Texte reçu le 27 avril 2007, révisé le 10 septembre 2008, accepté le 27 mars 2009.

A. GUILBAUD, HSM-IMJ, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France.

Courrier électronique : guilbaud@math.jussieu.fr

G. JOUVE, Université de Lyon, Université Lyon 1, IUFM de Lyon, Institut Camille Jordan UMR 5208 du CNRS, 21 avenue Claude-Bernard, F-69622 Villeurbanne Cedex, France.

Courrier électronique : jouve@math.univ-lyon1.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A50.

Mots clés : Équations aux dérivées partielles, intégration, résolution, fluides, cordes vibrantes, fonctions arbitraires.

Key words and phrases. — Partial differential equations, integration, solving, fluids, vibrating strings, arbitrary functions.

On the basis of the first part of his works, D'Alembert is nowadays considered as the founder of the theory of partial differential equations. His methods of solving these equations in physico-mathematical contexts which can be found in the nine volumes of his *Opuscles mathématiques* (1761–1783), however, have hardly been studied by historians. Within the scope of this article, we propose to examine this question for his research on vibrating strings and the flow of fluids in this late corpus. This study will enable us to pin down and analyze his approach and the associated concept of solving differential equations. Given the impact of these questions on related fields of research, this leads us to also reconsider his opinion and the development of his ideas with regard to the controversy on arbitrary functions. At the end of this article, we offer an inventory of partial differential equations in all of D'Alembert's works.

INTRODUCTION

Dans son mémoire intitulé « Recherches sur le système du Monde », publié dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris* pour l'année 1775, Laplace, l'un des protégés de D'Alembert, rend ainsi hommage à ce dernier pour sa contribution au développement de la théorie des équations aux dérivées partielles¹ :

« Je dois à M. d'Alembert la justice d'observer que, si j'ai été assez heureux pour ajouter quelque chose à ses excellentes *Réflexions sur la cause des vents*, j'en suis principalement redevable à ces Réflexions elles-mêmes et aux belles découvertes de ce grand géomètre sur la Théorie des fluides et sur le Calcul aux différences partielles, dont on voit les premières traces dans l'ouvrage que je viens de citer. Si l'on considère combien les premiers pas sont difficiles en tout genre et surtout dans une matière aussi compliquée ; si l'on fait attention aux progrès immenses de l'Analyse depuis l'impression de son Ouvrage, on ne sera pas surpris qu'il nous ait laissé quelque chose à faire encore et que, aidés par des théories que nous tenons de lui presque toutes entières, nous soyons en état d'avancer plus loin dans une carrière qu'il a le premier ouverte ». [Laplace 1778, p. 91]

Les nombreux articles et ouvrages historiques parus ces vingt-cinq dernières années vont dans le même sens et s'accordent à juste titre sur le rôle majeur de D'Alembert dans la naissance de cette nouvelle branche des mathématiques permettant d'aborder les problèmes qui relèvent de ce que

¹ Nous parlons ici d'*équations aux dérivées partielles* par commodité, mais nous revenons sur cette expression anachronique dans la suite.

nous appelons aujourd'hui la mécanique des milieux continus. Les conclusions de leurs auteurs, S. S. Demidov, S. B. Engelsman, J. Lützen et G. Grimberg, sont fondées sur une étude des textes de jeunesse de D'Alembert : le *Traité de dynamique* [D'Alembert 1743], dans lequel la première équation aux dérivées partielles voit le jour, les *Réflexions sur la cause générale des vents* [D'Alembert 1747], les « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration » [D'Alembert 1749a;b], et l'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* [D'Alembert 1752b].

L'invention du calcul aux différences partielles résulte d'un long processus de gestation, initié dès la fin du xvii^e siècle par les recherches de Leibniz, Jacques I, Jean I et Nicolas I Bernoulli sur les familles de courbes dépendant d'un paramètre, puis continué par Euler dans le courant des années 1730 via sa théorie des équations modulaires [Engelsman 1984a]. L'apport de D'Alembert repose essentiellement, d'après les quatre historiens des sciences évoqués, sur l'introduction de cet outil dans le cadre des sciences physico-mathématiques. Le savant ouvre la voie à une nouvelle méthode de mise en équation pour les problèmes du fil pesant, des cordes vibrantes, du mouvement de l'atmosphère, de la résistance et de l'écoulement des fluides. Cette méthode est d'autant plus innovante, selon S. S. Demidov, qu'elle est associée, avec plus ou moins de succès suivant la question abordée, à une volonté d'intégrer les équations obtenues, ce qui permet de considérer D'Alembert comme le fondateur de la théorie des équations aux dérivées partielles.

La contribution de D'Alembert à la naissance de cette théorie constitue donc un sujet relativement balisé. Cependant, l'historiographie dont nous avons connaissance se concentre principalement sur la première phase de ses recherches en la matière (1741–1752) : la période des grands traités et des mémoires les plus célèbres, essentiellement avant l'*Encyclopédie*. Dans les huit tomes de ses *Opuscles mathématiques*, parus entre 1761 et 1780, et dans divers manuscrits non publiés de son vivant, D'Alembert consacre par ailleurs de nombreux mémoires à la continuation de ses travaux dans ce domaine. L'inventaire des équations aux dérivées partielles que nous avons réalisé et que nous vous présenterons à l'occasion de cette étude en témoigne. Ces recherches tardives portent en particulier sur la possibilité de « résoudre » les équations aux dérivées partielles précédemment mises