Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 139–157.

D'UNE VARIABLE À PLUSIEURS VARIABLES EN ANALYSE COMPLEXE : LES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET LA POSITIVITÉ (1942–1962)[1]

Pierre LELONG (*)

RÉSUMÉ. — Henri Poincaré, à la fin du XIX^{e} siècle, pensait déjà que le passage d'une à plusieurs variables complexes en analyse ne se réduisait pas à une simple généralisation de l'analyse à une variable. Lui-même a introduit dans $\mathbb{C}^n$ des techniques de la théorie du potentiel (fonctions sousharmoniques dans $\mathbb{R}^{2n}$). Cependant, l'étude systématique d'une classe invariante par les isomorphismes analytiques complexes, celle des fonctions plurisousharmoniques, débute seulement en 1942. Une autre classe invariante, celle des courants positifs fermés, est introduite en 1957 comme une conséquence du théorème d'existence d'un opérateur d'intégration sur les ensembles analytiques complexes avec singularités. En se limitant à la période 1942–1962, on relate ici l'introduction de ces classes invariantes d'éléments non holomorphes, objets d'une analyse (et d'une géométrie) complexe où la positivité joue un rôle essentiel.

ABSTRACT. — FROM ONE TO SEVERAL VARIABLES IN COMPLEX ANALYSIS : PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS AND POSITIVITY (1942–1962). At the close of the nineteenth century, Henri Poincaré had already been of the opinion that the transition from one to several complex variables would involve no mere generalisation of single-variable analysis. He himself introduced, in $\mathbb{C}^n$, techniques drawn from potential theory (subharmonic functions on $\mathbb{R}^{2n}$). However, systematic investigation of an invariant class for complex analytic isomorphisms, i.e. the class of plurisubharmonic functions, was not undertaken until 1942. A further invariant class, that of closed positive currents, was introduced in 1957, as being entailed by the existence theorem for an integration operator on analytic sets with singularities. Keeping to the period 1942–1962, this paper surveys the introduction of such invariant classes of non-holomorphic elements, subject to a branch of complex analysis (and geometry) where positivity is an essential feature.

[1] N.d.R. : ce texte entre dans la catégorie « *des articles de mathématiciens contemporains dont le témoignage et le regard apportent des matériaux pour l'écriture de l'histoire des mathématiques au* XX^{e} *siècle* » (voir l'éditorial).

(*) Texte reçu le 13 avril 1994, révisé le 17 octobre 1994.
Pierre LELONG (Académie des sciences), 9, place de Rungis, 75013 Paris.
Courrier électronique : pil@ccr.jussieu.fr.

INTRODUCTION

Le passage d'une à plusieurs variables complexes s'est accompagné d'une transformation profonde de l'analyse, notamment lorsqu'on a voulu étendre les solutions locales en des solutions globales. Une approche de ces problèmes dans un cadre holomorphe, a conduit à l'utilisation d'outils de la topologie algébrique comme les faisceaux ou les groupes d'homologie (voir notamment [Cartan 1953], [Serre 1953]).

Nous présentons ici des travaux effectués dans une autre voie[2], développée notamment par l'auteur de cet article. Elle a consisté à étendre l'analyse en se plaçant dans un cadre non holomorphe et a aussi débouché sur une géométrie analytique complexe. Une notion de positivité particulière y joue un rôle important et souvent simplificateur.

Déjà, dans ses mémoires de 1883 et 1898, H. Poincaré avait utilisé dans $\mathbb{C}^n$ la théorie des potentiels newtoniens de masses positives, lesquels sont des fonctions sousharmoniques de l'espace réel $\mathbb{R}^{2n}$ support de $\mathbb{C}^n$. C'est toutefois un demi-siècle plus tard seulement, en 1942, que débute l'étude systématique d'une classe invariante par les isomorphismes analytiques complexes, celle des fonctions plurisousharmoniques (fonctions réelles non nécessairement continues) dans un domaine G de $\mathbb{C}^n$, dont l'ensemble est noté PSH(G). Le nom, choisi de préférence à pseudo-convexe, rappelle que, pour $n = 1$, cette classe coïncide avec celle des fonctions sousharmoniques introduites par F. Riesz [1926, 1930] et, chose plus importante, il en évoque les techniques. La classe PSH est le premier objet non holomorphe dans cette analyse complexe, qui apparaît, aujourd'hui, liée étroitement à une géométrie analytique complexe. Cette classe donne une caractérisation géométrique des domaines d'holomorphie univalents et bornés G de $\mathbb{C}^n$: ce sont les domaines convexes par rapport à PSH(G). En 1957 est établie l'existence de l'intégrale des formes différentielles sur les ensembles analytiques complexes avec singularités. C'est un opérateur courant fermé. Ce résultat introduit un autre objet de cette géométrie, la classe des courants positifs fermés. Ils peuvent être considérés comme une extension, *via* l'intégration, des ensembles analytiques complexes. Nous avons limité notre étude à la vingtaine d'années 1942–1962 et à ces

[2] Si ces deux voies ont d'abord pu paraître opposées (voir les divers exposés du colloque de Bruxelles de 1953), elles se sont avérées ensuite plutôt complémentaires.

deux éléments essentiels. Les objets de cette géométrie sont aujourd'hui les classes (de fonctions, d'opérateurs, d'ensembles, etc.) définies sur les variétés et les espaces analytiques complexes, qui sont invariantes par les bijections holomorphes et par elles seulement. Il existe en général une application d'un objet holomorphe dans une telle classe. L'application $F \mapsto \log |F|$ de l'ensemble des fonctions holomorphes dans la classe PSH en donne un exemple.

Au lecteur non spécialiste, il est conseillé de lire d'abord l'Appendice où figurent des rappels et des notations indispensables. Il comparera les définitions équivalentes de la classe PSH. Il constatera l'importance de la notion de positivité, définie d'abord pour les formes hermitiennes, puis étendue aux formes homogènes de type (p, p) de l'algèbre extérieure. On s'est efforcé de limiter ces rappels, mais, pour permettre de prendre contact avec des travaux relativement récents, on a placé dans la bibliographie quelques ouvrages généraux et des séminaires. On peut constater qu'une histoire plus complète exigerait de longs rappels techniques. Des progrès récents ont cependant permis de simplifier et de réordonner des chapitres importants de ce domaine [Range 1986].

1. LE PASSAGE A *N* VARIABLES ET L'IDÉE DE GÉNÉRALISATION

Comme l'a noté C. Houzel [1994], une des caractéristiques des mathématiques de notre XX^{e} siècle est «*le passage à plusieurs variables pour un certain nombre de problèmes que le dix-neuvième siècle avait abordés dans le cas d'une seule variable*». On est surpris de constater le peu de publications effectuées dans cette direction en analyse complexe au cours de la période qui va des travaux de Poincaré et de Cousin (fin du XIX^{e} siècle) à la publication, en 1934, par H. Behnke et P. Thullen, d'un ouvrage qui a servi de base à bien des chercheurs et a marqué le début d'une recherche active.

Faute de problèmes posés par des applications, le passage à plusieurs variables complexes pouvait apparaître d'abord comme une généralisation assez gratuite, où l'on s'efforce de retrouver dans une situation plus générale des propriétés de la dimension un. Suivie pour d'autres extensions de la théorie des fonctions d'une variable, cette voie a connu des succès, tels ceux obtenus par l'étude des applications quasi-conformes. Par ailleurs, au nom d'une pureté de moyens, on a longtemps séparé analyse complexe et analyse réelle (voir ainsi la démonstration du théorème de Cauchy donnée par E. Goursat dans son *Cours d'analyse* [1924, p. 71]). On évitait alors de changer le corps K de base ; de plus, on n'imaginait pas que la géométrie de K^n pouvait varier avec n, et que le passage à plusieurs variables était plus une affaire de géométrie que d'analyse.

Cependant, H. Poincaré avait perçu, dès 1883, que le passage à $n > 1$ variables ne pouvait être une généralisation au sens précisé plus haut. Pour montrer que, dans $\mathbb{C}^2$ comme dans $\mathbb{C}$, une fonction méromorphe F est le quotient de deux fonctions entières, il souligne l'intérêt, à l'exemple de Kronecker, de faire appel à la Physique dans une telle recherche et d'introduire des potentiels de masses positives. Dans un domaine G de $\mathbb{C}^n$, pour $n > 1$, une fonction méromorphe n'est plus une application de G dans $\overline{\mathbb{C}}$, et Poincaré en donne une définition (on y verrait aujourd'hui une section d'un faisceau). Soit un recouvrement de $\mathbb{C}^n$ par des boules B_i et dans B_i un quotient N_i/D_i représentant la fonction méromorphe F. Poincaré construit un potentiel H_1 dans $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, tel que la différence $H_1 - \log|D_i|$ soit harmonique dans B_i. Il calcule alors une fonction harmonique qui, ajoutée à H_1, donne une fonction H qui est pluriharmonique, donc vérifie $\mathrm{dd}^c H = 0$ et est partie réelle d'une fonction holomorphe en dehors de l'ensemble polaire défini dans chaque B_i par $D_i = 0$. Celle-ci donne alors la fonction dénominateur D et la représentation cherchée $F = N/D$, les fonctions N et D étant holomorphes dans tout l'espace. Présentée seulement pour $n = 2$ en 1883, la construction est effectuée en 1898 pour n quelconque. Elle utilise en fait une propriété précise des potentiels newtoniens de couche mince qu'étudie Poincaré. Les masses positives a étant portées par une sous-variété W de codimension réelle 2 dans un espace $\mathbb{R}^{2n}$, avec une densité continue, le potentiel

$$V(x) = \int \mathrm{d}\mu(a)\, \|x - a\|^{2-2n}$$

se comporte au voisinage de W comme $-\log d(x)$, si $d(x)$ est la distance de x à W.

En 1895, P. Cousin, en utilisant habilement les méthodes employées en dimension un par Mittag-Leffler et Weierstrass, a établi des résultats plus généraux. Il a montré, dans un domaine de $\mathbb{C}^n$ produit de n domaines de $\mathbb{C}$ simplement connexes, l'existence d'une fonction méromorphe ayant des pôles (problème I) ou des zéros (problème II) donnés. Poincaré, après sa publication de 1898, reviendra néanmoins sur l'idée de généralisation. Il écrit en 1901, dans l'analyse de ses travaux :

«*Il semble d'abord que, pour étudier les fonctions* [*analytiques*] *de deux variables, il suffit d'appliquer, sans rien y changer, les principes qui ont servi à établir les propriétés des fonctions d'une variable. Il n'en est rien ; il y a entre les deux théories des différences essentielles et l'on ne saurait passer de l'une à l'autre par une simple généralisation. Cette différence apparaît dès que l'on considère les polynômes entiers qui sont décomposables en facteurs s'il n'y a qu'une variable et ne le sont plus dans le cas contraire*» [1901/1921, p. 140].

On reviendra plus loin sur cet exemple. Un polynôme P est déterminé à une constante multiplicative près par ses zéros, mais, pour $n > 1$, on n'a plus de représentation de P dans tout $\mathbb{C}^n$; on en a cependant une de la fonction $\log|P|$, appartenant à $\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$, par un potentiel de masses positives portées par l'ensemble $P = 0$. La représentation analytique dépend nécessairement de la géométrie.

Nous avons insisté sur les idées de Poincaré et sur ses deux mémoires. Ils ont été un peu oubliés par les commentateurs à la suite des résultats de P. Cousin. Nous saisissons cette occasion de leur rendre hommage, le mémoire de 1898 en particulier ayant eu une influence directe sur l'auteur[3] (voir [Griffiths et Harris 1978, p. 388]).

2. LE CAS DE DEUX VARIABLES

Rappelons qu'une fonction f d'une variable x définie dans un domaine G de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, est dite *sousharmonique* si elle vérifie la propriété (A) rappelée dans l'Appendice où l'on remplace la moyenne sur les bords des

[3] Je me permets de donner ici un souvenir personnel. Un soir de l'hiver 1937, seul dans l'immense bibliothèque de l'Institut mathématique de Göttingen, je parcourais le texte de ce second mémoire de Poincaré et un énoncé me frappa : pour une fonction F holomorphe dans un domaine G de $\mathbb{C}^n$, $\log|F|$ est localement la somme d'une fonction harmonique et d'un potentiel newtonien de $\mathbb{R}^{2n}$, les masses étant portées par l'ensemble $F = 0$ avec une densité 1 (propriété aujourd'hui classique). J'eus aussitôt le sentiment que les calculs de Poincaré pouvaient être simplifiés compte tenu du théorème de Gauss ; une voie s'ouvrait. J'oubliais ensuite cela pendant plus d'un an jusqu'au moment où, abandonnant l'étude de certaines généralisations au sens indiqué plus haut, je me mis à étudier ce qu'on savait sur les fonctions holomorphes de n variables, en lisant le livre de Behnke et Thullen [1934].